



**HAL**  
open science

# Extension d'une methode de modification structurale pour la conception de dispositifs dissipatifs integrant des materiaux viscoelastiques

Benjamin Groult

► **To cite this version:**

Benjamin Groult. Extension d'une methode de modification structurale pour la conception de dispositifs dissipatifs integrant des materiaux viscoelastiques. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Centrale Paris, 2008. Français. NNT: . tel-00285042

**HAL Id: tel-00285042**

**<https://theses.hal.science/tel-00285042v1>**

Submitted on 4 Jun 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



ÉCOLE CENTRALE DES ARTS  
ET MANUFACTURES  
« ÉCOLE CENTRALE PARIS »



## THÈSE

présentée par

**Benjamin GROULT**

pour l'obtention du

**GRADE DE DOCTEUR**

Spécialité : Mécanique

Laboratoire d'accueil : Laboratoire de Mécanique des Sols, Structures et Matériaux  
(MSSMat)

Extension d'une méthode de modification structurale  
pour la conception de dispositifs dissipatifs  
intégrant des matériaux viscoélastiques

Soutenue le : 19 février 2008  
devant un jury composé de :

**Gérard COFFIGNAL**  
**Patrick MULLER**  
**Daniel RIXEN**  
**Etienne BALMÈS**  
**François ANNEQUIN**  
**Mathieu CORUS**  
**Laurent BILLET**

Président  
Rapporteur  
Rapporteur  
Directeur de thèse  
Examinateur  
Examinateur  
Invité

**n° 2008 - 14**

**Ecole Centrale Paris**  
Grand établissement sous tutelle du  
Ministère de l'Éducation Nationale  
Grande Voie des Vignes  
92295 Châtenay-Malabry Cedex

**Laboratoire de Mécanique des Sols,  
Structures et Matériaux (MSS-Mat)**  
CNRS UMR 8579 - Ecole Centrale Paris  
Tél. 33 (1) 41 13 10 31





ÉCOLE CENTRALE DES ARTS  
ET MANUFACTURES  
« ÉCOLE CENTRALE PARIS »



## THÈSE

présentée par

**Benjamin GROULT**

pour l'obtention du

**GRADE DE DOCTEUR**

Spécialité : Mécanique

Laboratoire d'accueil : Laboratoire de Mécanique des Sols, Structures et Matériaux  
(MSSMat)

Extension d'une méthode de modification structurale  
pour la conception de dispositifs dissipatifs  
intégrant des matériaux viscoélastiques

Soutenue le : 19 février 2008  
devant un jury composé de :

**Gérard COFFIGNAL**  
**Patrick MULLER**  
**Daniel RIXEN**  
**Etienne BALMÈS**  
**François ANNEQUIN**  
**Mathieu CORUS**  
**Laurent BILLET**

Président  
Rapporteur  
Rapporteur  
Directeur de thèse  
Examineur  
Examineur  
Invité

**n° 2008 - 14**

Ecole Centrale Paris  
Grand établissement sous tutelle du  
Ministère de l'Éducation Nationale  
Grande Voie des Vignes  
92295 Châtenay-Malabry Cedex

Laboratoire de Mécanique des Sols,  
Structures et Matériaux (MSS-Mat)  
CNRS UMR 8579 - Ecole Centrale Paris  
Tél. 33 (1) 41 13 10 31





# Remerciements

Ce document est le fruit de trois années de travail réalisé au sein d'EDF R&D au département AMA (Analyses Mécaniques et Acoustiques).

Une construction agréable, une synthèse douloureuse, une conclusion libératrice...

Merci au jury de m'avoir accordé une partie de leur précieux temps.

Merci à Étienne Balmès, Mathieu Corus, Laurent Billet pour leur encadrement tricéphal (parfois difficile à suivre).

Merci aux membres du département AMA pour leur accueil chaleureux.

Et enfin, merci à tous ceux qui m'ont soutenu tout au long de cette aventure : mes amis (mes collègues thésards, mes partenaires du MPT et tous les autres), ma famille -Flavie, Isa et ses p'tis bouts, mes parents...-.

Merci à vous tous...



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Matériaux viscoélastiques et dispositifs amortissants</b>	<b>5</b>
1.1 Modèles de matériaux dissipatifs . . . . .	5
1.1.1 Viscoélasticité linéaire . . . . .	5
1.1.2 Facteurs d'environnement . . . . .	8
1.1.3 Fréquences et variables réduites . . . . .	9
1.1.4 Représentation . . . . .	11
1.1.5 Choix des matériaux . . . . .	13
1.2 Dispositifs amortissants . . . . .	13
1.2.1 Différents types de dispositifs amortissant . . . . .	13
1.2.2 Réalisation de tirants amortis . . . . .	18
<b>2 Modèles de structures amorties</b>	<b>25</b>
2.1 Modèles de structures amorties . . . . .	25
2.1.1 Équations du mouvement . . . . .	25
2.1.2 MSE (Modal Strain Energy) . . . . .	27
2.1.3 Modes complexes . . . . .	29
2.2 Réduction de modèles viscoélastiques . . . . .	31
2.2.1 Enrichissement par des termes de correction statique . . . . .	31
2.2.2 Cas d'un amortissement localisé . . . . .	33
2.2.3 Cas d'un amortissement réparti . . . . .	42
2.2.4 Conclusion sur l'enrichissement . . . . .	49
<b>3 Utilisation de méthodes classiques de conception pour un dispositif amortissant original</b>	<b>51</b>
3.1 Le problème industriel . . . . .	51
3.1.1 Contexte . . . . .	51
3.1.2 Un exemple d'application possible . . . . .	52
3.2 Le démonstrateur . . . . .	54
3.2.1 Justifications du choix du démonstrateur . . . . .	54
3.2.2 Analyse modale expérimentale de la structure initiale . . . . .	55
3.2.3 Description numérique . . . . .	59

3.3	Description de la modification . . . . .	63
3.3.1	Concept original de dispositif amortissant . . . . .	64
3.3.2	Effet de la position des tirants . . . . .	66
3.3.3	Dimensionnement de la modification . . . . .	71
3.3.4	Conception finale . . . . .	81
3.4	Analyse modale de la structure modifiée . . . . .	84
3.5	Conclusion . . . . .	87
<b>4</b>	<b>Revue bibliographique des méthodes de modification structurale</b>	<b>89</b>
4.1	Méthodes classiques de modification structurale : outils et formulations	90
4.1.1	Modèle de la structure d'origine . . . . .	90
4.1.2	Sous-structuration dynamique et réduction de modèles . . . . .	92
4.1.3	Formulation multiplicative ou méthode de couplage d'impédance	95
4.1.4	Formulation additive ou méthode modale . . . . .	97
4.2	Limitations des méthodes classiques de modification structurale . . . . .	99
4.3	Méthode de modification structurale LMME (Local Model Modeshapes Expansion) : outils et formulation . . . . .	101
4.3.1	Le modèle local . . . . .	101
4.3.2	Expansion de données . . . . .	101
4.3.3	Modes d'interface . . . . .	103
4.3.4	Étude du processus de prédiction . . . . .	105
4.3.5	Proposition de mise en œuvre industrielle . . . . .	109
<b>5</b>	<b>Utilisation d'une méthode de modification structurale pour la concep- tion d'un dispositif amortissant original</b>	<b>111</b>
5.1	Les évolutions de la méthode LMME . . . . .	111
5.2	Un premier exemple . . . . .	113
5.3	Un exemple plus complexe . . . . .	116
5.4	Robustesse de la méthode LMME amortie . . . . .	120
5.4.1	Choix du maillage capteurs . . . . .	120
5.4.2	Choix du modèle local . . . . .	126
5.4.3	Choix de la taille de la base d'expansion . . . . .	133
5.5	Spécificités des modifications dissipatives . . . . .	138
5.5.1	Choix de la fréquence centrale pour le calcul de la base de réduction	138
5.5.2	Évolution du comportement de la modification selon la fréquence	141
5.6	Comparaison essais/prédiction . . . . .	143
	<b>Conclusion</b>	<b>151</b>

# Table des figures

1.1	Cycle d'hystérésis pour un matériau viscoélastique linéaire . . . . .	7
1.2	Les différents états d'un matériau viscoélastique . . . . .	8
1.3	Superposition fréquence/température . . . . .	10
1.4	Facteur de décalage en température . . . . .	10
1.5	Modèles d'amortissement . . . . .	12
1.6	Tirant amorti du BTP . . . . .	14
1.7	Tirant amorti aéronautique . . . . .	14
1.8	Plot amortissant . . . . .	15
1.9	Rapport de raideurs compression/cisaillement . . . . .	16
1.10	Principe de dissipation . . . . .	17
1.11	Autre modélisation d'une couche de matériau viscoélastique . . . . .	18
1.12	Paramètres de dimensionnement . . . . .	18
1.13	Photo d'une réalisation de tirant amorti . . . . .	19
1.14	Tiges de liaison des tirants amortis . . . . .	20
1.15	Ensemble masse-ressort . . . . .	21
1.16	Banc d'essai de tirant amorti et masses testées . . . . .	22
1.17	Masses testées . . . . .	22
2.1	Cas test 1 . . . . .	33
2.2	Déformées cas test . . . . .	34
2.3	Frf cas test . . . . .	35
2.4	Évolution en fonction de la raideur du joint . . . . .	37
2.5	Évolution en fonction du facteur de perte du joint . . . . .	37
2.6	Évolution de comportement dépendant de la fréquence . . . . .	38
2.7	Évolution des fréquences et amortissements propres . . . . .	39
2.8	Exemple de transfert avec un comportement dépendant de la fréquence . . . . .	39
2.9	Évolution de comportement fortement dépendant de la fréquence . . . . .	40
2.10	Exemple de transfert avec un comportement fortement dépendant de la fréquence . . . . .	41
2.11	Cas test 2 . . . . .	42
2.12	Synthèse modale pour différentes bases . . . . .	42
2.13	Fréquences des modes d'une base de réduction . . . . .	43
2.14	Modes 1 et 2 . . . . .	44
2.15	Erreurs relatives . . . . .	44

2.16	Troisième et sixième modes d'enrichissement de $T_{visc}$ . . . . .	45
2.17	Modes 1, 2 et $T_{visc_3}$ et $T_{visc_6}$ dans le plan . . . . .	45
2.18	Erreurs relatives . . . . .	46
2.19	Chargements standard de couche viscoélastique . . . . .	47
2.20	Erreurs relatives . . . . .	48
2.21	MAC entre $T_{stand}$ et $T_{visc}$ . . . . .	49
3.1	Alternateur . . . . .	53
3.2	Modes d'ovalisation d'un alternateur . . . . .	54
3.3	Photo du démonstrateur . . . . .	55
3.4	Excitation pour l'analyse modale . . . . .	56
3.5	Réciprocité de la structure . . . . .	57
3.6	Modes identifiés . . . . .	57
3.7	le démonstrateur . . . . .	59
3.8	Modes calculés . . . . .	60
3.9	Transfert du démonstrateur initial . . . . .	61
3.10	MAC $\phi_{numérique} - \phi_{test}$ . . . . .	62
3.11	Transferts mesuré, synthétisé, calculé. . . . .	62
3.12	Amortissement de modes d'ovalisation . . . . .	64
3.13	Support pour fixation de tirants amortis . . . . .	65
3.14	Démonstrateur modifié simplifié . . . . .	66
3.15	Démonstrateur vu de dessus . . . . .	67
3.16	volution des caractéristiques modales selon différentes configurations . . . . .	67
3.17	volution des caractéristiques modales selon différentes configurations . . . . .	68
3.18	Démonstrateur vu de dessus . . . . .	69
3.19	volution des caractéristiques modales selon différentes configurations . . . . .	69
3.20	volution des caractéristiques modales selon différentes configurations . . . . .	70
3.21	Répartition d'énergie de déformation . . . . .	71
3.22	Transferts avant et après modification . . . . .	73
3.23	Évolution de transfert en fonction de la raideur . . . . .	74
3.24	Évolution de transfert en fonction de la raideur avec amortissement . . . . .	75
3.25	Évolution de la fréquence et de l'amortissement en fonction de la masse de la modification . . . . .	76
3.26	Facteur de décalage en température . . . . .	77
3.27	Excitation . . . . .	78
3.28	Diffusion thermique . . . . .	79
3.29	Profil de températures dans un tirant sollicité . . . . .	80
3.30	Transferts pour différentes températures . . . . .	81
3.31	La structure modifiée . . . . .	82
3.32	Transferts avec un comportement exact <i>vs.</i> comportement moyen . . . . .	83
3.33	Transferts avant et après modification . . . . .	83
3.34	FRF après modification . . . . .	84
3.35	Modes d'ovalisation à 2 lobes identifiés après modification . . . . .	86

3.36	Comparaison calcul/essai après modification . . . . .	87
4.1	Méthodes de modification structurale . . . . .	89
4.2	Les étapes des méthodes classiques de modification structurale . . . . .	99
4.3	Les étapes de la méthode LMME . . . . .	100
5.1	Cas test 2 . . . . .	114
5.2	Modèle local et maillage capteurs . . . . .	115
5.3	Modélisation de la structure modifiée . . . . .	117
5.4	Quelques modes de la structure modifiée . . . . .	120
5.5	Les configurations capteurs . . . . .	121
5.6	Prédiction selon un paramètre . . . . .	123
5.7	Prédiction selon un paramètre . . . . .	124
5.8	Évolution d'un paramètre de prédiction . . . . .	125
5.9	Modélisation de la structure modifiée . . . . .	126
5.10	Prédiction selon un paramètre . . . . .	127
5.11	Modélisation de la structure modifiée . . . . .	128
5.12	Modes d'ovalisation à 2 lobes selon un paramètre géométrique . . . . .	129
5.13	Comparaison de déformées . . . . .	130
5.14	Deux modèles locaux . . . . .	131
5.15	Prédiction pour 2 modèles locaux . . . . .	132
5.16	Modes d'ovalisation à 3 lobes . . . . .	133
5.17	Prédiction selon un paramètre . . . . .	135
5.18	Un vecteur d'une base d'expansion . . . . .	136
5.19	Un vecteur d'une base d'expansion . . . . .	136
5.20	Zoom sur un IERI . . . . .	137
5.21	Évolution du comportement de l'élastomère <i>smactane50</i> . . . . .	138
5.22	Couplage pour différentes bases d'expansion . . . . .	139
5.23	Prédictions selon le comportement du matériau viscoélastique . . . . .	141
5.24	Exemple de transfert avec un comportement dépendant de la fréquence (matériau viscoélastique <i>smactane50</i> ) . . . . .	142
5.25	Un mode d'ovalisation à 3 lobes prédit . . . . .	143
5.26	Paramètres de prédiction expérimentale d'un mode d'ovalisation à 3 lobes	144
5.27	Un mode d'ovalisation à 2 lobes prédit . . . . .	145
5.28	Paramètres de prédiction expérimentale d'un mode d'ovalisation à 2 lobes	145
5.29	Quelques vecteurs d'une base d'expansion . . . . .	146
5.30	Validation expérimentale . . . . .	148



# Liste des tableaux

2.1	Comparaison de bases en synthèse modale . . . . .	36
3.1	Dimensions du démonstrateur . . . . .	56
3.2	Modes et fréquences propres expérimentales du démonstrateur . . . . .	58
3.3	Modes et fréquences propres du démonstrateur . . . . .	60
3.4	Propriétés thermodynamiques . . . . .	78
3.5	Modes identifiés de la structure modifiée . . . . .	85
5.1	Dimensions cas test . . . . .	115
5.2	Répartition de l'amortissement . . . . .	116
5.3	Fréquences et amortissements modaux du modèle numérique . . . . .	118
5.4	Fréquences et amortissements modaux du modèle numérique . . . . .	119
5.5	Angles entre sous-espaces . . . . .	140
5.6	Angles entre sous-espaces . . . . .	140
5.7	Modes de la structure modifiée, identifiés et prédits . . . . .	147

# Notations

Cette liste n'est pas exhaustive et d'autres notations peuvent apparaître dans le document.

– Glossaire

<i>AMA</i>	: Analyses Macaniques et Acoustiques
<i>BTP</i>	: Bâtiment et Travaux Publics
<i>FRF</i>	: Frequency Response Function
<i>GTA</i>	: Groupes Turbo-Alternateurs
<i>IERI</i>	: Indicateurs Énergétique de Régularité de l'Interface
<i>IRA/Sorensen</i>	: Méthode de recherche de premières fréquences propres
<i>LMME</i>	: Local Model Modal Expansion [16]
<i>MDRE</i>	: Minimum Dynamic Residual Expansion
<i>MEF</i>	: Méthode d'approximation par Éléments Finis
<i>MSE</i>	: Modal Strain Energy
<i>MAC</i>	: Modale Accuracy Criteron
<i>SEREP</i>	: System Equivalent Reduction Expansion Process
<i>X – SDM</i>	: Méthode LMME étendue à des cas dissipatifs

– Matrices

$[c]$	: matrice d'observation
$[b]$	: matrice de commande
$[M]$	: matrice de masse
$[K]$	: matrice de raideur
$[B]$	: matrice d'amortissement hystérétique
$[Z]$	: matrice de rigidité dynamique
$[G]$	: matrice de flexibilité
$[\phi]$	: matrice de modes
$[T]$	: base de réduction
$[Id]$	: matrice identité
$[\Gamma]$	: matrice d'amortissement modal
$[\Omega]$	: matrice diagonale de pulsations propres au carré
$[0]$	: matrice de zéros

– Vecteurs

$\{q\}$	: Degrés de liberté "physiques"
$\{\eta\}$	: DDL généralisés
$\{f\}$	: Efforts
$\{\phi\}$	: vecteur propre

– Scalaires

$\omega$	: pulsation propre
$\xi$	: coefficient d'amortissement modal
$\eta$	: facteur de perte
$\sigma$	: contrainte
$\epsilon$	: allongement relatif
$E$	: module d'Young
$\nu$	: coefficient de Poisson
$G$	: module de cisaillement
$\rho$	: masse volumique
$\xi$	: coefficient d'amortissement critique
$F$	: fréquence propre

– Indices & Exposants

$\diamond^T$	: transpose l'élément
$\diamond^X$	: qui fait référence à la structure X
$\diamond_{xy}$	: restriction d'une matrice aux indices (x,y)
$\diamond_x$	: restriction d'un vecteur aux indices x
$\diamond_{x \times y}$	: taille de l'élément x lignes y colonnes



# Introduction

## Contexte

La demande croissante d'énergie électrique en France conduit EDF à construire de nouveaux moyens de production, comme l'EPR de FLAMANVILLE, mais aussi à faire ses meilleurs efforts pour sécuriser la production du parc de centrales électriques existant.

Au sein des unités de production, on peut dénombrer des matériels (moteurs, pompes, tuyauteries, générateurs, transformateurs...) qui, du fait de conditions d'exploitation particulièrement sévères, d'une conception peu optimisée ou sous l'effet du vieillissement voient leur niveau vibratoire évoluer défavorablement au cours du temps. Lorsque les niveaux vibratoires atteignent des seuils jugés préjudiciables pour la tenue du matériel, l'arrêt de la machine est déclenché. Les lourdes pertes d'exploitation qui peuvent en résulter justifient largement l'étude et la mise en œuvre rapide de solutions pour restaurer un état vibratoire acceptable de la machine défectueuse.

Avant d'en arriver au remplacement complet de la machine, solution ultime, forcément onéreuse et nécessitant des délais d'approvisionnement parfois très importants (plusieurs mois voire plusieurs années pour des machines qui n'ont plus cours sur le marché) on préfère tenter de corriger le comportement vibratoire de la machine par des modifications mécaniques extérieures (ajout de raidisseurs, de masses, de matériaux amortissants).

Le dimensionnement et l'optimisation de tels dispositifs de correction vibratoire sont à la portée d'un bon bureau d'études pour autant qu'il dispose des plans de conception et d'un temps suffisamment long pour modéliser, avec un logiciel aux éléments finis, la structure à modifier.

Ces deux conditions ne sont en général pas réunies pour les problèmes vibratoires auxquels EDF doit faire face :

- EDF est rarement le concepteur des matériels qu'il exploite ; il n'en a donc qu'une connaissance approximative,
- les délais demandés pour aboutir à une solution efficace sont parfois de quelques semaines, au mieux de quelques mois.

Ces contraintes ont naturellement conduit, ces dernières années, EDF à développer des méthodes de correction vibratoires originales, appelées méthodes de modification structurale. La particularité de ces méthodes est de s'appuyer autant que possible sur

---

des relevés vibratoires expérimentaux pour décrire le comportement dynamique de la structure à modifier : seules les modifications apportées à la structure font l'objet d'une modélisation explicite. On fait ainsi l'économie de la construction d'un modèle précis de l'installation, pour représenter son comportement dynamique, ce qui apporte un gain de temps considérable et ce qui permet, eu égard à la faible connaissance qu'on a de l'installation, d'avoir une description souvent plus fidèle de la réalité.

Des outils permettant de prédire l'effet d'un couplage mécanique entre une structure et une modification existaient déjà depuis de nombreuses années. Cependant, ces méthodes de modification structurale (qu'on qualifiera ici par commodité de classiques) nécessitaient souvent l'utilisation de données expérimentales particulières, notamment des mesures précises de la future interface de raccordement entre la structure initiale et sa modification.

Corus [16], dans le cadre d'une thèse financée par EDF a fortement amélioré les performances des méthodes de modification structurale dites modales, à l'aide de techniques de réduction et d'expansion de modèles pour s'affranchir de ce besoin.

## Motivation de la thèse

Les développements proposés par Corus, qui concernaient uniquement des modifications en masse ou en raideur, ont permis d'apporter des solutions à de nombreux problèmes vibratoires, notamment ceux qui sont liés à l'accrochage d'un mode propre de la structure par une raie harmonique excitatrice (comme celle qui résulte du balourd d'une machine tournante). Ces modifications, en jouant sur le décalage fréquentiel du comportement de la structure permettent d'éviter la coïncidence avec la raie excitatrice.

En revanche, les problèmes dus à des excitations large bande sont difficiles à résoudre par ces méthodes. Le décalage fréquentiel à produire pour éloigner les modes propres de la bande excitée peut être trop important pour être réalisable.

Les cas de forte densité modale rendent également la méthode par raidissement ou ajout de masse délicate à maîtriser, car le risque de créer d'autres problèmes vibratoires (accrochage d'un autre mode) existe.

Enfin, EDF est confronté à des problèmes vibratoires associés à des excitations harmoniques pour lesquels les modifications en masse ou en raideur n'apportent pas de solutions stables dans le temps. Des dérives lentes du comportement sont observées. Cela nécessite une maintenance très régulière et un ajustement incessant des modifications apportées.

Pour résoudre ces problèmes particuliers, un autre principe de modification est donc envisagé : l'apport d'un amortissement, à l'aide de modifications dissipatives ciblées sur les modes excités, doit permettre la diminution du niveau vibratoire pour l'éloigner sensiblement des seuils d'alerte.

---

## Objectifs et contenu de la thèse

Le premier objectif de la thèse est de proposer une démarche de dimensionnement de dispositifs dissipatifs adaptés au type de structures exploitées par EDF. Les dispositifs envisagés font appel à des matériaux viscoélastiques qui ont un fort potentiel amortissant. La démarche de dimensionnement, délibérément conçue pour être mise en œuvre avec les outils classiques d'un bureau d'étude (analyse modale expérimentale et code mécanique des structures aux éléments finis) est exposée dans les 3 premiers chapitres de la thèse.

Dans le premier chapitre, on donne des éléments théoriques sur le comportement intrinsèque des matériaux amortissants et on décrit quelques règles simples de mise en œuvre de ces matériaux sur différents types de dispositifs amortissants. Les essais de caractérisation du tirant amorti proposé au chapitre 3 sont par ailleurs détaillés.

Dans le chapitre 2, on rappelle les outils théoriques et les modèles de calcul permettant de modéliser les structures amorties en dynamique. On étudie en particulier les méthodes de réduction de modèles viscoélastiques et démontre, à travers des exemples, que la base des modes élastiques doit être complétée par une correction statique correspondant aux efforts viscoélastiques pour obtenir une prédiction correcte.

C'est dans le troisième chapitre qu'on trouve à proprement parler l'étude de dimensionnement vibratoire. Dans un premier temps, on justifie le choix d'un démonstrateur expérimental et sa représentativité par rapport aux structures qu'EDF envisage d'amortir. On caractérise ensuite le comportement dynamique de ce démonstrateur par des essais d'analyse modale expérimentale. Un modèle aux éléments finis de la structure à amortir est alors réalisé. Ce modèle permet de simuler et d'optimiser l'effet d'une modification dissipative. On propose également des moyens simples pour prendre en compte la variation de la température du matériau sous l'effet de la dissipation d'énergie. La dernière étape consiste à réaliser concrètement la modification dissipative sur le démonstrateur, d'en mesurer expérimentalement les performances, performances qu'on compare enfin à celles prédites par la modélisation numérique.

Le deuxième objectif de la thèse est de proposer et de mettre au point une méthode de calcul permettant d'accélérer la démarche précédente grâce à l'utilisation d'une technique de modification structurale. La technique proposée ici est dérivée de la méthode LMME, bilan des développements réalisés par Corus, mais elle permet, en plus, de prendre en compte l'introduction de modifications dissipatives. Les deux derniers chapitres de la thèse sont consacrés à la présentation et à l'étude des performances de cette nouvelle méthode.

Le chapitre 4 fait une revue bibliographique des différentes méthodes classiques de modification structurale, formulation par couplage d'impédance et formulation modale, et donne les outils qui ont permis de développer la méthode LMME dans un cadre de structures non ou faiblement amorties.

Dans le dernier chapitre, on étend le cadre d'application de la méthode LMME à des cas de modifications fortement dissipatives. À travers un premier exemple faiblement



amorti, on montre que la méthode LMME initialement proposée appliquée dans le cadre de la MSE [78] est équivalente à la méthode LMME amortie. Un deuxième exemple, basé sur le cas test défini au chapitre 3, illustre les capacités de la méthode amortie à prédire l'effet de modifications très amorties. Une étude de robustesse de la méthode est alors proposée, puis une étude expérimentale permet de valider l'application de la méthode LMME amortie.

# Chapitre 1

## Matériaux viscoélastiques et dispositifs amortissants

L'amortissement des vibrations des structures est un problème présent dans tous les domaines de l'industrie. Les solutions d'amortissement vont des dispositifs passifs (introduction de frottement ou intégration de matériaux viscoélastiques, par exemple) au contrôle actif grâce à des matériaux piézoélectriques.

Dans ce chapitre, on se concentre sur les matériaux viscoélastiques et la description de leur comportement (section 1.1), puis sur leur utilisation dans des dispositifs amortissants (section 1.2).

### 1.1 Modèles de matériaux dissipatifs

Les matériaux viscoélastiques ont des caractéristiques d'amortissement intéressantes. Pour de nombreux matériaux viscoélastiques, la viscoélasticité linéaire (section 1.1.1) permet une description simple de cet amortissement.

De nombreux facteurs d'environnement (section 1.1.2), notamment la température, sont très influents sur le comportement de ces matériaux. L'introduction de variables réduites (section 1.1.3) permet cependant de décrire simplement cette forte dépendance du comportement. Différents modèles de représentation sont donnés en section 1.1.4.

Enfin la section 1.1.5 donne une liste non exhaustive de propriétés de certains élastomères pouvant orienter le choix de tel ou tel matériau viscoélastique.

#### 1.1.1 Viscoélasticité linéaire

La viscoélasticité linéaire est définie par le fait que les contraintes sont des fonctions linéaires de l'histoire des déformations. Cela se traduit par l'existence d'une fonction de relaxation [81]

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^0 \epsilon(t - \tau) h(\tau) d\tau \quad (1.1)$$

Dans le domaine de Laplace, c'est équivalent à l'existence d'un module  $\Lambda$  complexe tel que

$$\sigma(s) = \Lambda(s)\epsilon(s) = (\Lambda'(s) + i\Lambda''(s))\epsilon(s) \quad (1.2)$$

On peut donc envisager de résoudre les problèmes de viscoélasticité en considérant des problèmes d'élasticité équivalents avec un module complexe dépendant de la fréquence. C'est le principe d'équivalence élastique/viscoélastique décrit dans [81].

Pour les matériaux isotropes et homogènes,  $\Lambda$  est complètement décrit par un module d'Young  $E^*$  et un coefficient de Poisson  $\nu^*$  complexes. Leur mesure séparée pose cependant des problèmes expérimentaux très significatifs. La pratique est donc de mesurer le module d'Young  $E^*$ , ou le module de cisaillement  $G^*$ , et de supposer un coefficient de Poisson  $\nu^*$  constant. Très peu de données sont par ailleurs disponibles sur les variations de  $\nu^*$  avec la fréquence ; on sait principalement dire qu'il diminue lorsque la fréquence augmente [76],[67].

Dans le domaine fréquentiel, si on considère le module d'Young dans les cas de traction compression, l'équation précédente s'écrit

$$\sigma(\omega) = E^*(\omega)\epsilon(\omega) = [E'(\omega) + iE''(\omega)]\epsilon(\omega) = E'(\omega)[1 + i\eta(\omega)]\epsilon(\omega) \quad (1.3)$$

On appelle module de stockage la partie réelle  $E'(\omega) = \text{Re}(E^*(\omega))$  et facteur de perte le rapport partie imaginaire sur partie réelle  $\eta(\omega) = \frac{\text{Im}(E^*(\omega))}{\text{Re}(E^*(\omega))} = \frac{E''}{E'}$ .

A chaque fréquence, le module complexe décrit une relation contrainte/déformation elliptique

$$\sigma = \text{Re}(E^* \epsilon_0 e^{i\omega t}) = \text{Re}(E'(1 + i\eta)\epsilon_0 e^{i\omega t}) = E' \epsilon_0 (\cos \omega t - \eta \sin \omega t) \quad (1.4)$$

montrée en figure 1.1.

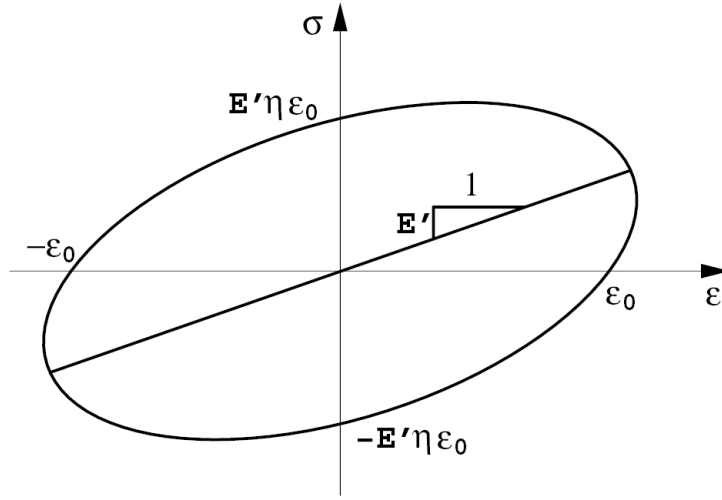


FIG. 1.1 – Cycle contrainte/déformation elliptique pour un matériau viscoélastique linéaire dans le cas d’une excitation harmonique.

Le nom facteur de perte traduit le fait que  $\eta$  correspond au ratio de l’énergie dissipée par unité de volume  $E_d$  sur un cycle de déformation par  $2\pi$  fois l’énergie potentielle maximale  $E_p = E' \frac{\varepsilon_0^2}{2}$

$$E_d = \int_0^T \sigma \dot{\varepsilon}_0 dt = E' \eta \varepsilon_0^2 \omega \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin^2 \omega t dt = \pi E' \eta \varepsilon_0^2 = \eta 2\pi E_p \quad (1.5)$$

La forme de l’ellipse qui décrit un cycle d’hystérésis change avec l’évolution du facteur de perte  $\eta$ . Plus le facteur  $\eta$  est grand, plus l’énergie dissipée  $E_d$  est grande et plus la surface de l’hystérésis est importante.

Par analogie, on peut écrire le même type de relations pour le module de cisaillement,

$$\sigma_S(\omega) = G^*(\omega) \varepsilon_S(\omega) = [G'(\omega) + iG''(\omega)] \varepsilon_S(\omega) = G'(\omega) [1 + i\eta_S(\omega)] \varepsilon_S(\omega). \quad (1.6)$$

La relation entre  $G'$  et  $E'$  est habituelle

$$E' = 2(1 + \nu)G', \quad (1.7)$$

et  $\eta \approx \eta_S$ , de telle manière que la partie imaginaire de  $\nu$  est très petite.

### 1.1.2 Facteurs d'environnement

On observe expérimentalement que les propriétés des matériaux amortissants dépendent non seulement de la fréquence mais également de la température  $T$ , de la pré-déformation statique  $\epsilon_0$  (ou précontrainte statique) et d'autres facteurs d'environnement.

La température est le facteur d'environnement ayant le plus d'influence sur les caractéristiques des matériaux viscoélastiques [67]. En fonction de la température, les matériaux viscoélastiques peuvent se présenter dans quatre états différents montrés en figure 1.2 :

- l'état vitreux (a),
- l'état de transition (b),
- l'état caoutchouteux (c) et
- l'état fluide (d),

correspondant chacun à une zone de température donnée. Selon le matériau considéré, la température ambiante peut se trouver dans l'une des quatre régions. Pour les mélanges de polymères, chaque polymère peut se retrouver dans une zone différente, ce qui rend l'étude de tels matériaux difficile.

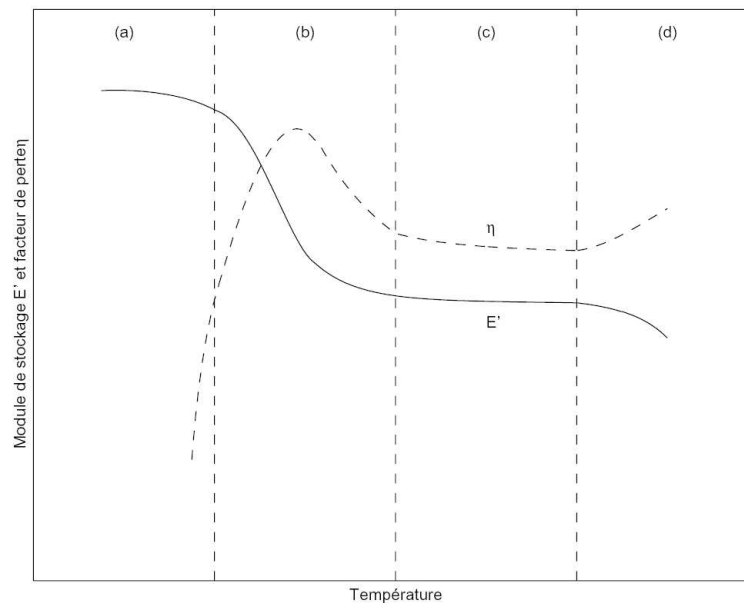


FIG. 1.2 – Variation du module de stockage  $E'$  et du facteur de perte  $\eta$  d'un matériau viscoélastique en fonction de la température à fréquence constante.

Dans la première zone (a) associée aux températures les plus faibles, le matériau est dans son état vitreux caractérisé par un module de stockage atteignant sa valeur maximale et variant peu avec la température. Le facteur de perte est très faible et

augmente rapidement avec la température. Les déformations du matériau sont alors très faibles. La zone de transition (b) est caractérisée par un module décroissant fortement avec la température et un facteur de perte présentant son maximum au milieu de la zone (température de transition vitreuse  $T_g$  qui dépend de la fréquence). Dans la région caoutchoutique (c), le module de stockage et le facteur de perte sont tous deux caractérisés par des valeurs relativement faibles variant peu avec la température. La quatrième région (d) correspond à un état fluide du matériau. Cet état est très peu considéré dans les études de conception en raison de son instabilité. De plus, pour beaucoup de matériaux, cette région n'est pas définie.

Dans l'objectif d'amortir les vibrations, il est utile de solliciter les matériaux au voisinage de la zone de transition (b). Ce choix est motivé par les variations du facteur de perte  $\eta$  qui atteint son maximum dans cette zone, permettant ainsi une utilisation optimale des propriétés amortissantes du matériau viscoélastique.

Pour les élastomères,  $\nu \approx 0,5$  dans la zone (b) [67], et donc l'équation (1.7) donne  $E \approx 3G$ . Pour les plus basses températures (zone (a)), l'élastomère est beaucoup plus raide et  $\nu \approx 0,33$ . Il n'existe cependant que très peu de données sur la variation de  $\nu$  en fonction de la fréquence et de la température.

### 1.1.3 Fréquences et variables réduites

En décalant en fréquence les courbes donnant les propriétés du matériau en fonction de la fréquence à différentes températures, elles tendent à se superposer et à décrire une courbe continue [82], [52]. Cette propriété a motivé l'introduction de la notion de fréquence réduite  $\hat{\omega} = \alpha(T)\omega$  associée à une description du module sous la forme

$$E^*(\omega, T) = \hat{E}(\hat{\omega}) = \hat{E}'(\hat{\omega})[1 + i\hat{\eta}(\hat{\omega})] \quad (1.6)$$

où les grandeurs  $\hat{E}$  et  $\alpha_T = \alpha(T)$  sont respectivement appelées courbe maîtresse et facteur de décalage en température. Il s'agit de l'hypothèse de superposition fréquence/température [67], qui s'applique à beaucoup de matériaux viscoélastiques linéaires.

Les données du module de stockage  $\hat{E}'$ , du facteur de perte  $\hat{\eta}$ , du facteur de décalage en température  $\alpha_T$  rendent donc possible une représentation complète du module complexe en fonction de la fréquence et de la température. Dans le cas de la figure 1.3, le décalage en température a été évalué pour garantir le recollement des courbes de module de stockage et de facteur de perte pour chaque petite bande de fréquence à différentes températures du BI2F.

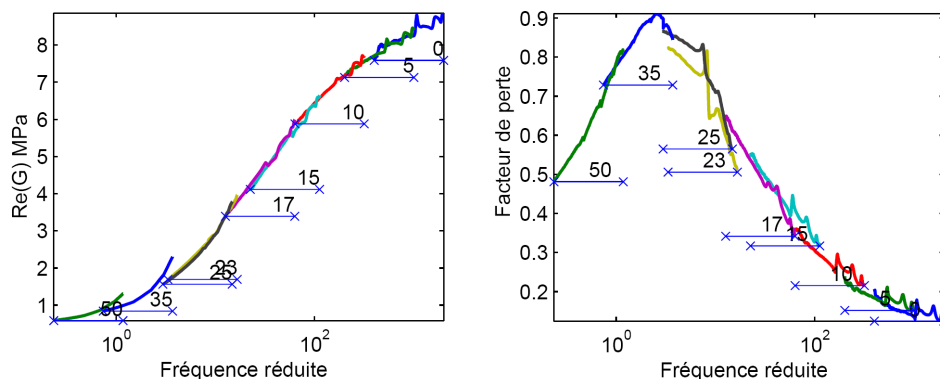


FIG. 1.3 – Module de stockage et facteur de perte du BI2F en fréquence réduite -  $T \in [0 - 50]^{\circ}\text{C}$ , [52].

L'allure du facteur de décalage utilisé pour construire les courbes de la figure 1.3 est donnée par la figure 1.4.

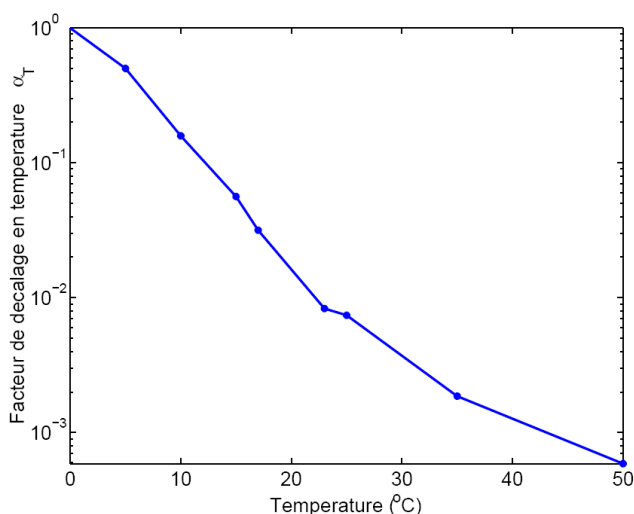


FIG. 1.4 – Facteur de décalage en température  $\alpha_T$  du BI2F, [52].

L'hypothèse de superposition fréquence/température n'est pas toujours satisfaite. Dans le cas de matériaux non homogènes, l'hypothèse ne s'applique pas forcément, même dans la zone de transition [40], en particulier pour les mélanges de polymères (assemblage de deux polymères au niveau des liaisons chimiques, ceci crée un nouveau polymère au motif alterné) ou les polymères chargés (les charges sont des éléments organiques et inorganiques d'environ 10 microns qui sont ajoutés au polymère). Pour un assemblage de deux polymères par exemple, à une température donnée, les polymères peuvent se trouver dans deux états différents. La méthode des variables réduites ne peut pas s'appliquer lorsque deux transitions de nature différente (par exemple une transition

secondaire et la transition vitreuse) se chevauchent, à la fréquence considérée, sur une même plage de température. Dans ce cas, les deux types de processus moléculaires mis en jeu ne présentent pas la même dépendance en fréquence.

Parmi les autres facteurs influant sur le comportement amortissant, la précontrainte statique  $\epsilon_0$  est importante. Il peut, là aussi, être possible d'introduire un facteur de décalage  $\alpha_{\epsilon_0} = \alpha(\epsilon_0)$  pour tenir compte de ce nouveau facteur d'environnement [52].

### 1.1.4 Représentation

Les essais conduisent à une représentation sous forme de table (loi tabulée) du module complexe en fréquence réduite  $\alpha_T \omega$  ou  $\alpha_{\epsilon_0} \omega$ , mais également du facteur de décalage en température  $\alpha_T$  et en précontrainte  $\alpha_{\epsilon_0}$  aux températures  $T$  et aux précontraintes  $\epsilon_0$ . Pour connaître le module en un point de fonctionnement arbitraire  $(\omega, T, \epsilon_0)$ , on interpole ou extrapole les valeurs expérimentales du facteur de décalage pour trouver la fréquence réduite, puis on interpole ou extrapole le module sur la courbe maîtresse.

L'interpolation se déroule en deux étapes. On effectue d'abord une interpolation linéaire du logarithme du facteur de décalage  $\log \alpha_T$  ou  $\log \alpha_{\epsilon_0}$  pour connaître sa valeur au point de température  $T$  ou de précontrainte  $\epsilon_0$  désiré. On en déduit la fréquence réduite associée  $\alpha_T \omega$  ou  $\epsilon_0 \omega$ . On réalise alors une interpolation du logarithme des parties réelles et imaginaires du module complexe  $\log E'(\omega)$  et  $\log E''(\omega)$  en ces nouvelles valeurs de fréquence réduite.

L'avantage d'une représentation non-paramétrique de la loi de comportement est de permettre la représentation de comportements généraux fortement dépendants de la fréquence et de la température/précontrainte sur une large gamme. De plus, l'utilisation directe des données permet de contourner des étapes de choix de représentation et d'identification des paramètres. Dans la mesure où l'ensemble des calculs de conception peuvent être réalisés en utilisant des interpolations numériques, la représentation tabulée est la plus générale.

Cependant, il est parfois intéressant de disposer d'une description analytique. On cherche ainsi à approcher le comportement viscoélastique par un modèle analytique simple, *i.e.* qui possède peu de paramètres.



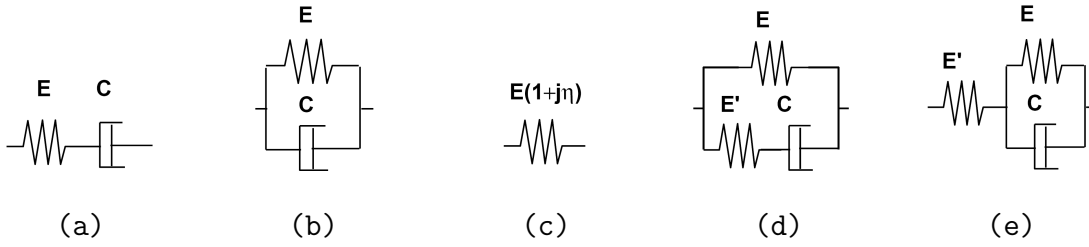


FIG. 1.5 – Modèle d’amortissement à deux ou trois paramètres : (a) Modèle de Maxwell; (b) Modèle de Kelvin-Voigt; (c) Amortissement hystérique (Structural); (d) Modèle de Zener; (e) Modèle de Poynting.

La première idée consiste à utiliser des modèles rhéologiques (association de masse, ressort et amortisseur visqueux élémentaires qui décrivent la relation entre contrainte et déformation). Le modèle à trois paramètres exposé en figure 1.5 (Modèle de Zener, encore appelé solide viscoélastique standard) reprend les caractéristiques principales trouvées sur les matériaux réels : asymptotes haute et basse fréquence, maximum de dissipation à la fréquence de plus grande pente de variation du module. Le module complexe de ce modèle qui comprend un élément élastique de module  $E$  en parallèle avec deux autres éléments (un élément élastique  $E'$  et un élément visqueux  $C$ ) s’écrit

$$E(\hat{s}) = \bar{E} + \frac{\underline{E} - \bar{E}}{1 + \hat{s}/\omega_j} \quad (1.9)$$

où  $\underline{E}$  représente l’asymptote basse fréquence, l’asymptote haute fréquence  $\bar{E}$  est égale à  $E + E'$  et la fréquence où le maximum de dissipation est atteint  $\omega_j \sqrt{\underline{E}/\bar{E}}$  est liée au temps de relaxation  $\tau = 1/\omega_j = C/E'$ .

On peut améliorer la précision du modèle en utilisant des formulations plus élaborées.

Des exemples de représentation analytique approchée sont les modèles à dérivées fractionnaires qui proposent l’utilisation de puissances non entières de  $\hat{s} = i\hat{\omega}$ , ce qui permet une représentation fréquentielle dont la pente est arbitraire [1], [76], [67].

Le modèle décrit par (1.10) et (1.11) est un exemple de modèle à 4 paramètres.

$$E(\hat{s}) = \underline{E} + \bar{E} \left( 1 - \frac{1}{1 + (\beta\hat{s})^n} \right) \quad (1.10)$$

$$\eta(\hat{s}) = \frac{n\pi\bar{E}(\beta\hat{s})^n}{2E(\hat{s})(1 + (\beta\hat{s})^n)^2} \quad (1.11)$$

où les modules haute et basse fréquences, respectivement  $\bar{E}$  et  $\underline{E}$ , sont déterminés facilement. Les coefficients  $\beta$  et  $n$  permettent d’ajuster la fréquence du maximum de dissipation et les pentes du module de stockage et du facteur de perte.

### 1.1.5 Choix des matériaux

Dans [67], sont répertoriés quelques nomogrammes qui permettent de choisir le matériau viscoélastique adéquat. Au-delà de ces propriétés plus ou moins marquées en fonction du type de caoutchouc, certains élastomères ont des caractéristiques spécifiques qui rendent leur usage particulièrement intéressant dans certaines conditions d'environnement [15]. A titre d'exemple, on peut citer :

- bonnes propriétés mécaniques (NR -Natural Rubber-, CR -chloroprène-...),
- résistance aux hautes températures et à différents produits chimiques (silicone, ACM -polyacrylique-, AEM -caoutchouc d'acrylate d'éthyle ou d'autres acrylates et d'éthylène-, CM -Polychoroéthylène-, CSM -Polyéthylène chlorosulfoné-, HNBR -caoutchouc butadiène-nitrile acrylique hydrogéné-, FKM -Fluorés-...),
- résistance aux basses températures (silicone, BR -polybutadiène-...),
- résistance aux huiles et carburants... (NBR -butadiène-nitrile acrylique-, ECO -épichlorhydrine copolymère-...),
- résistance à l'ozone (caoutchoucs saturés comme EPDM -ethylene-propylene terpolymer-, CM, CSM...),
- résistance à l'abrasion (SBR -styrène-butadiène- et BR renforcés par des charges...).

Il n'existe pas d'élastomère « idéal » remplissant toutes les fonctions souhaitées. On parlera toujours de compromis de propriétés. Le choix du bon matériau est donc une étape extrêmement importante dans les phases de conception des produits.

## 1.2 Dispositifs amortissants

Dans cette section, on s'intéresse à l'utilisation de matériaux viscoélastiques pour la conception de dispositifs amortissants. La section 1.2.1 donne quelques exemples de dispositifs amortissants. La section 1.2.2 décrit ensuite la réalisation d'un dispositif amortissant, type « tirant amorti ».

### 1.2.1 Différents types de dispositifs amortissant

La mise en œuvre des matériaux viscoélastiques peut prendre différentes formes. Ils sont largement utilisés dans de nombreux domaines de l'industrie mis à part certaines applications où les polymères ne conviennent pas au cahier des charges (problèmes de radiation, de tenue au vieillissement...). Selon la bande de fréquences que l'on souhaite traiter, les dispositifs amortissant peuvent être :

- des **tirants** amortis aussi bien dans l'aéronautique ou aérospatiale [66] que dans le BTP [51] (problèmes à basses et très basses fréquences) ; un exemple de réalisation est donné en section 1.2.2,
- des plots amortissants dans le BTP (fig. 1.8) et tous les supports machines,
- des panneaux collés sur la structure dans l'automobile [5] (problèmes acoustiques).

Les tirants amortis sont utilisés dans des situations où l'on cherche à faire travailler la couche viscoélastique en cisaillement pur dans une direction, mais sans charger l'élément dans les autres directions. Les figures 1.6 et 1.7 sont des exemples de conception de tirants amortis.

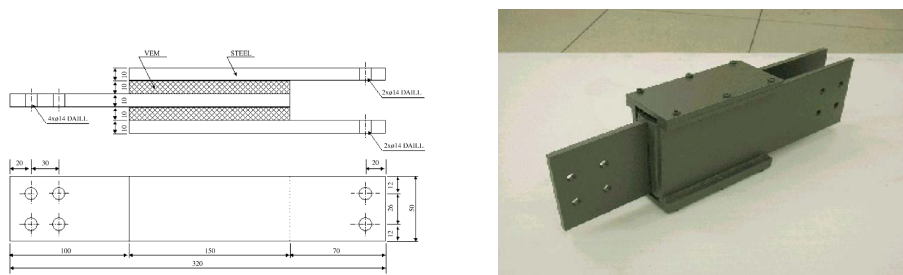


FIG. 1.6 – Exemple de conception de tirant amorti (structure métallique enserrant une couche de matériau viscoélastique -partie grisée) et exemple de réalisation pour le bâtiment. [51]

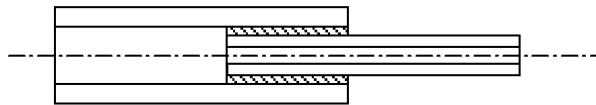


FIG. 1.7 – Exemple de conception de tirant amorti pour l'aéronautique (cylindres creux liés par une couche de viscoélastique) [66]

La raideur dynamique d'une couche de viscoélastique en cisaillement pur est donnée par

$$k_z = G(1 + i\eta) \frac{S}{e} \quad (1.12)$$

où  $S$  est la surface de la couche mince de matériau viscoélastique et  $e$  son épaisseur.

Lors de la réalisation, le cisaillement sera le principal mode de dissipation d'énergie sur la bande de fréquences donnée. La formule de raideur dynamique proposée ci-dessus paraît donc être une approximation raisonnable du comportement de ces dispositifs. On remarque que les caractéristiques géométriques et le module de cisaillement sont étroitement liés. Le choix de la géométrie du dispositif est donc directement en relation avec le choix du matériau.

Les plots amortissants sont généralement utilisés pour subir une très forte charge statique verticale (support d'ouvrage d'art). La dissipation est due au travail du plot dans le plan vertical (compression) ou horizontal (cisaillement). Cette configuration est cohérente avec l'utilisation en BTP puisqu'elle est apte à supporter des charges lourdes avec une raideur du plot sur l'axe vertical largement plus élevée que dans le plan horizontal. L'utilisation de tels plots est généralement destinée à réaliser l'isolation vibratoire de la structure.

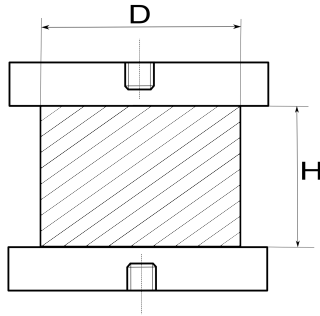


FIG. 1.8 – Schéma de plot amortissant. [51]

Jones [51] donne une expression dans le cas de plots amortissants simples (figure 1.8) des raideurs complexes verticales

$$k_z = E(1 + i\eta) \left( \frac{\pi D^2}{4H} \right) \left[ 1 + \beta \left( \frac{D}{4H} \right)^2 \right], \quad (1.13)$$

et horizontales

$$k_x = k_y = G(1 + i\eta) \left( \frac{\pi D^2}{4H} \right) \quad (1.14)$$

où  $D$  est le diamètre du plot,  $H$  la hauteur et  $\beta$  un facteur variant entre 1,5 et 2 selon la nature saturée ou non de l'élastomère.

Le facteur  $\left( 1 + \beta \left( \frac{D}{4H} \right)^2 \right)$  est facteur de correction de forme (effet de bord).

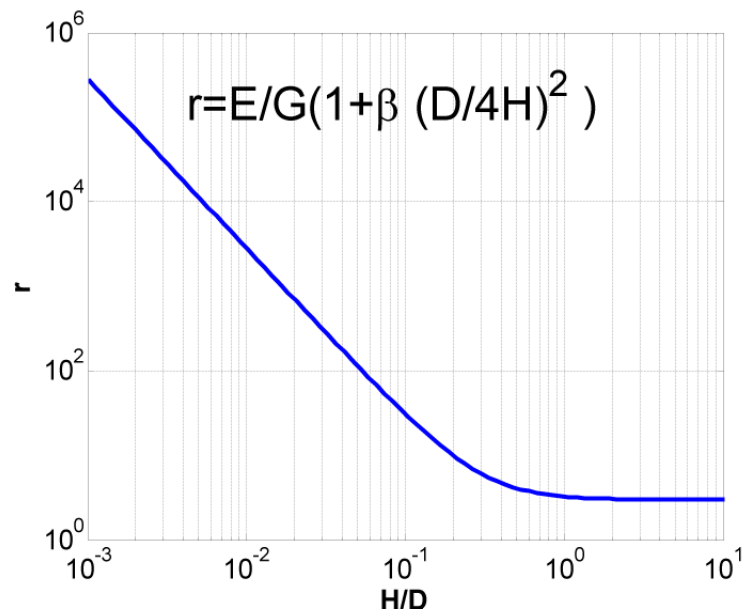


FIG. 1.9 – Évolution du rapport entre la raideur en compression et celle en cisaillement pour un plot amortissant simple. [51]

On remarque que le rapport entre la raideur en cisaillement et la raideur en compression est donné par  $\frac{E}{G} \left( 1 + \beta \left( \frac{D}{4H} \right)^2 \right)$ . La figure 1.9 montre l'évolution de ce rapport en fonction de la hauteur  $H$ . Pour des petites valeurs de  $H$ , la raideur en compression est très largement supérieure à celle en cisaillement. On se trouve alors dans des configurations similaires au tirant, avec un comportement très différent selon la direction.

Pour une application de dissipation d'énergie vibratoire, la solution des tirants amortis est la meilleure. On voit que le rapport surface de matériau sur hauteur est le rapport dimensionnant. Or d'un point de vue technologique, le rapport  $\frac{S}{\tau}$  d'une configuration de travail en cisaillement est bien plus modulable que le rapport  $\frac{A}{l}$  d'une configuration de travail en compression.

Les panneaux collés travaillent principalement en flexion et la dissipation est due au cisaillement induit par cette flexion. Deux options de configuration peuvent être envisagées (figure 1.10). La première est le collage simple d'une fine couche de matériau viscoélastique. La dissipation est alors principalement localisée autour du point de courbure maximale. La deuxième est obtenue en ajoutant une plaque métallique de contrainte. Le cisaillement de la couche viscoélastique est alors maximum aux extrémités des plaques. C'est donc ici que l'on observe principalement la dissipation [6].

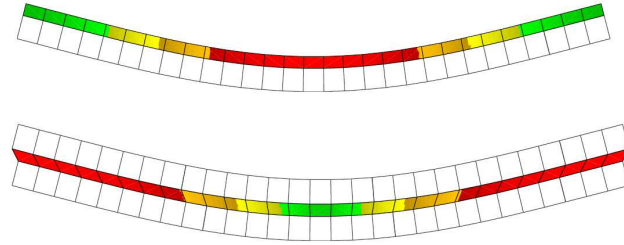


FIG. 1.10 – Localisation de la dissipation pour une configuration de panneaux collés de matériau viscoélastique.

La modélisation d'une telle configuration sandwich composée de deux couches rigides qui pré-contrainent une couche de matériau viscoélastique beaucoup plus souple n'est pas simple. La théorie classique des plaques minces [73] a quelques faiblesses dans la représentation de l'effet du facteur de cisaillement. Les plaques classiques ne peuvent pas représenter les importantes variations des contraintes planes dans l'épaisseur. De nouveaux éléments plaque enrichis ont vu le jour [54]. Le problème majeur avec ces éléments d'ordre plus élevé est la difficulté de développement.

Les configurations faisant intervenir différents éléments sont bien plus facile à utiliser. Balmès et Plouin [74] ont proposé dans cette optique une configuration faisant appel à des éléments classiques de coques à 4 nœuds pour les couches extérieures et de volumes à 8 nœuds pour la couche viscoélastique (fig. 1.11). Cette méthode a l'avantage d'utiliser des éléments classiques et d'éviter ainsi le développement coûteux d'éléments spécifiques.

On peut remarquer que les éléments de volume à 8 nœuds ont tendance à être perturbés par des phénomènes de verrouillage en flexion. Il faut cependant noter que l'âme du dispositif est ici beaucoup plus souple que les couches extérieures et que l'énergie dissipée est presque exclusivement liée au cisaillement. Le phénomène de verrouillage n'a donc pas d'impact sur les réponses prédites. L'utilisation d'une telle configuration paraît adaptée à l'application recherchée.

D'autres références ont proposé la même configuration [37]. Les motivations sont similaires : l'utilisation d'éléments de volume pour le matériau viscoélastique semble adapté du fait que le matériau est quasiment incompressible (ce qui est difficilement modélisable en 2-D) et travaille principalement en cisaillement (mieux représenté par des éléments volumiques).

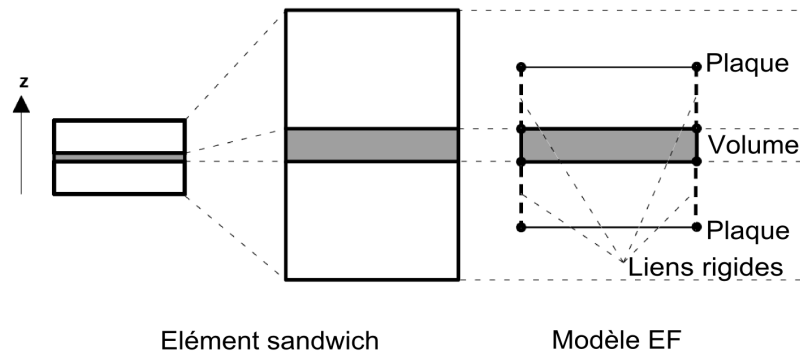


FIG. 1.11 – Schématisation de la configuration coque/3D/coque retenue.

### 1.2.2 Réalisation de tirants amortis

Le principe fonctionnel du tirant est simple puisqu'il s'apparente à un ressort amorti. Sa réalisation impose néanmoins un certain nombre de critères de conception illustrés ici pour le tirant réalisé au cours de cette thèse.

On a vu à la section 1.1.3 que la précontrainte statique est un facteur d'environnement qui influence le comportement des matériaux viscoélastiques. Afin de rester dans une zone de précontrainte de faible influence, des règles de dimensionnement s'appliquent. Un allongement statique  $\epsilon$  de moins de 30% permet en règle générale de négliger l'effet de la précontrainte statique. Les paramètres définis sur la figure 1.12 permettent de proposer une démarche de dimensionnement d'un tirant.

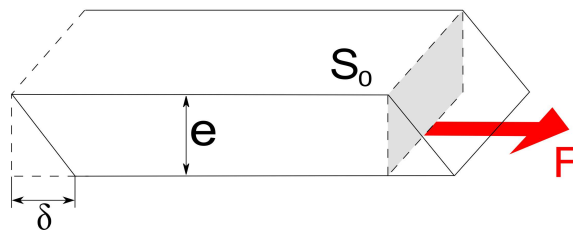


FIG. 1.12 – Cisaillement d'une couche de matériau viscoélastique. Définition de paramètres de dimensionnement.

Le volume est fixé par une face de surface  $S_0$  sur un support rigide. On applique sur la face opposée une force  $F$  parallèle à la face dans l'axe d'un bord. Cette force induit une déformation angulaire définie par le rapport  $\frac{\delta}{e} = \epsilon$ . La contrainte moyenne

de cisaillement  $\tau$  s'exprime en fonction de  $F$  et  $S_0$  ou du module de cisaillement  $G$  et de  $\epsilon$  sous les formes

$$\tau = \frac{F}{S_0} \quad \text{et} \quad \tau = G.\epsilon \quad (1.15)$$

Pour un matériau donné, on peut ainsi déterminer la surface minimale de la couche viscoélastique pour obtenir une déflexion statique inférieure à 30% en fonction de la force  $F$  et du module de cisaillement  $G$ . Pour du *smactane50*, matériau utilisé pour la réalisation du tirant considéré, le module de cisaillement statique  $G(0Hz)$  vaut approximativement  $1.10^5 Pa$ . Si on considère un effort  $F = 30N$ , qui correspond au chargement statique défini pour la réalisation d'un dispositif amortissant décrit au chapitre 3, la surface minimale à prendre est

$$S_0 \geq \frac{F}{0,3.G} = 1.10^{-3}m^2 = 10cm^2 \quad (1.16)$$

On assure de cette manière un comportement linéaire du matériau viscoélastique.

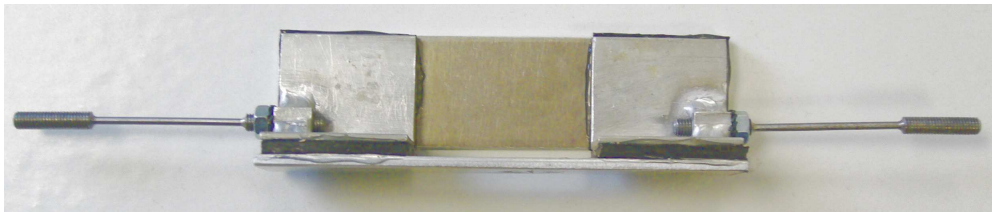


FIG. 1.13 – Photo d'une réalisation de tirant amorti.

Pour mieux contrôler le travail du matériau viscoélastique, il est intéressant de forcer le cisaillement du matériau viscoélastique dans la direction du tirant. On cherche donc à éliminer le maximum de mouvements parasites en réalisant une glissière élastique. Le guidage en translation selon l'axe du tirant est assuré par deux profilés en L coulissant l'un par rapport l'autre, et entre lesquels sont intercalés deux pavés d'élastomère. Pour faciliter la mise en œuvre et le montage, on préfère mettre en série deux dispositifs, reliés entre eux par deux plaques métalliques indépendantes, assurant ainsi une raideur de liaison importante entre les deux glissières. On dispose alors d'un montage de raideur équivalente  $K$ , avec quatre ressorts de raideur  $k$ , tel que  $K = k$  (deux lots, en parallèle, de deux ressorts en série). Le dispositif réalisé est présenté sur la figure 1.13.

Ce type de montage a en plus l'avantage de diviser la charge de travail en augmentant la surface de matériau viscoélastique pour la même raideur.



Pour parfaire la réalisation, on se propose d'utiliser des liaisons rotule de part et d'autre du tirant pour assurer le passage des efforts principalement dans l'axe de celui-ci. Les liaisons rotule permettent en effet d'éliminer les ddl autres que celui de traction-compression. Cependant le montage de nombreuses liaisons rotules du commerce impose un certain jeu qui perturberait le fonctionnement du tirant. La dissipation d'énergie doit se localiser principalement dans le matériau viscoélastique afin de maîtriser l'amortissement. Afin de contrôler le comportement des liaisons rotules, et notamment d'éviter les chocs souvent présents dans les rotules du commerce, on préfère donc l'utilisation d'une « liaison solide », réalisée à l'aide de tiges en acier, élancées, très souples en flexion et suffisamment raides en traction-compression. On exploite ici le principe de découplage entre les pots vibrants et les structures testées qui met en œuvre ce type de solutions.

La figure 1.14 montre la tige de liaison utilisée pour l'application. La figure 1.13 est une photo d'une réalisation du tirant amorti décrit précédemment.

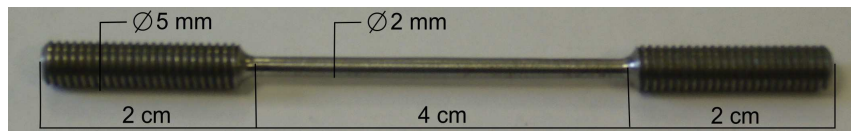


FIG. 1.14 – Tiges de liaison des tirants amortis.

Afin de caractériser le comportement des tirants, un banc d'essai a été mis en place. On cherche à caractériser le mode traction-compression des tirants et à vérifier que les perturbations dues à des éléments comme le collage du matériau viscoélastique sur les plaques métalliques ne sont pas trop pénalisantes.

Pour ce faire, on considère un ensemble tirant-masse encastré-libre (fig. 1.15).

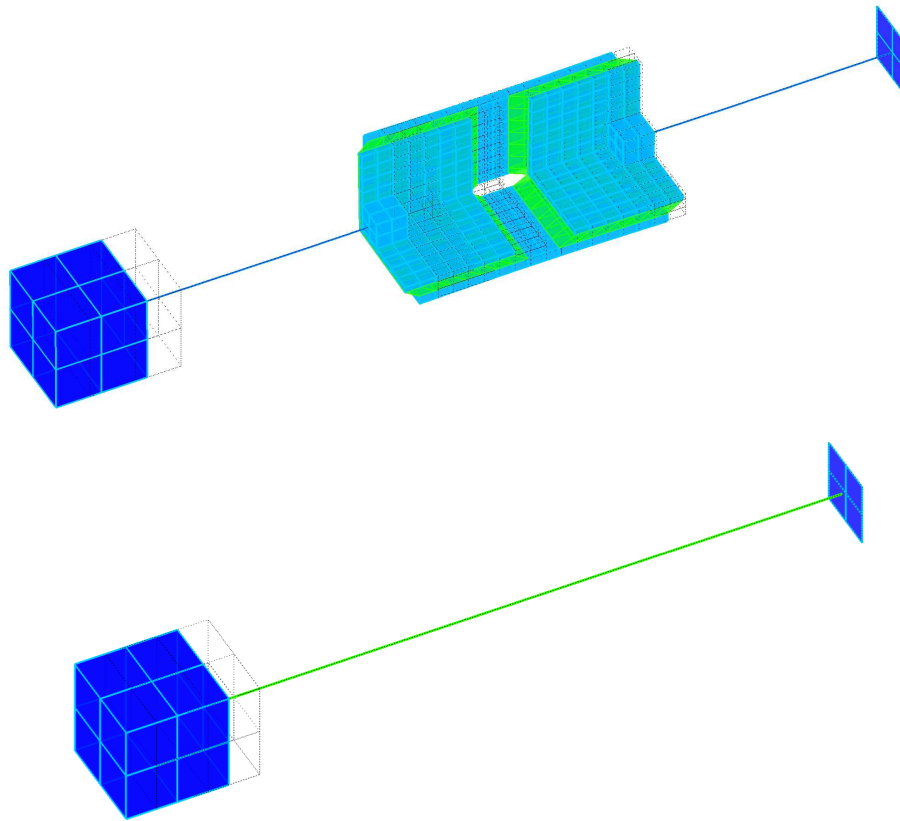


FIG. 1.15 – Ensemble masse-ressort. Mode de traction/compression du tirant. Modélisation détaillée et modélisation fonctionnelle.

Une modélisation fonctionnelle suffit en général à décrire le comportement d'une structure dans son application. Tout a été mis en œuvre ici pour utiliser le tirant en traction/compression. Une modélisation équivalente (fig. 1.15),  $K_{\text{équivalent}} = k(1 + i\eta)$ , ne prenant en compte que les modes de traction/compression du tirant permet en effet de s'affranchir d'une modélisation lourde, de modes parasites des tirants, *etc.*

La figure 1.16 présente le banc d'essai utilisé. Une excitation au marteau de choc dans l'axe du tirant permet de visualiser le mode de traction/compression et d'extraire par identification la fréquence propre et l'amortissement modal.

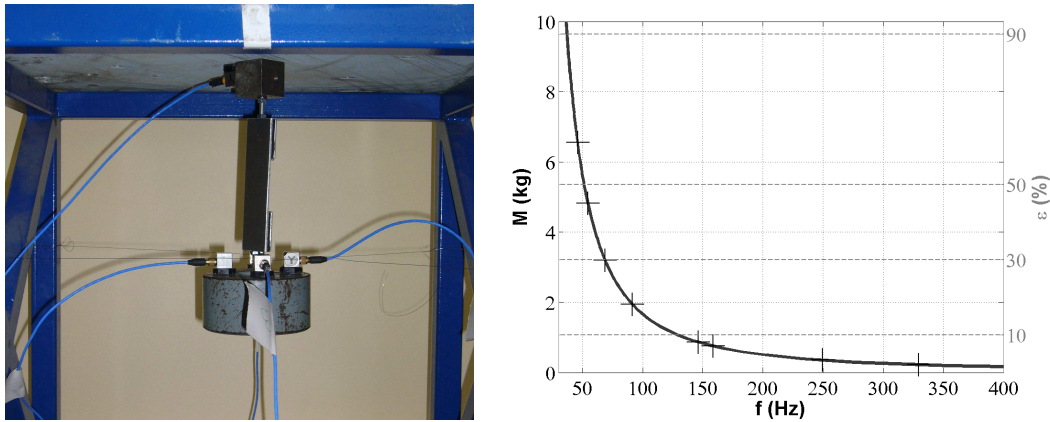


FIG. 1.16 – Banc d’essai de tirant amorti et fréquences propres théoriques d’un tirant en fonction des masses testées.

La fréquence propre du mode de traction-compression est directement liée à la masse utilisée et au module de cisaillement du matériau viscoélastique *smactane50* constituant le tirant. La fréquence propre théorique du mode considéré est donnée par

$$f_{th} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k(f_{th})}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{G(f_{th})S}{me}} \quad (1.17)$$

À partir des caractéristiques du *smactane50*, on détermine donc les masses à tester. Les caractéristiques mécaniques des matériaux viscoélastiques sont largement dépendantes de la fréquence.

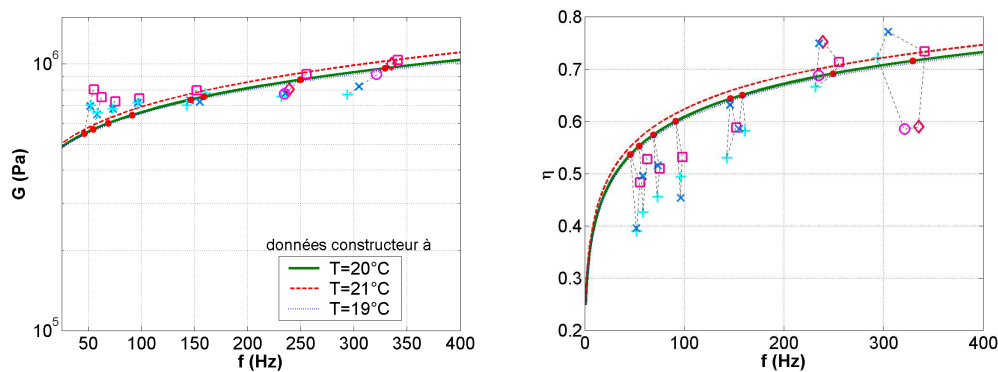


FIG. 1.17 – Module de cisaillement  $G$  et facteur de perte  $\eta$  du matériau viscoélastique en fonction de la fréquence  $f$ . Données constructeur (trait plein et  $\bullet$ ) et résultats d’essai sur 5 tirants ( $+$ ,  $\times$ ,  $\circ$ ,  $\square$ ,  $\diamond$ ).

Plusieurs tirants sont testés afin de vérifier la dispersion du comportement d'un tirant à l'autre. La figure 1.17 montre qu'on retrouve de manière nette les propriétés de raideur du matériau viscoélastique pour des masses relativement petites. L'identification du facteur de perte est plus difficile à cause d'une dispersion importante des mesures. L'évolution globale des résultats de mesure confirme cependant les données du constructeur pour des valeurs de masse faibles. Là encore, l'augmentation de la masse dégrade la qualité de la corrélation..

La précontrainte statique due à la charge que représentent les masses testées est sans doute à l'origine de ce décalage. La figure 1.16 présente les niveaux de prédéformation statique associés à chaque masse testée. La précontrainte statique est un des facteurs d'environnement des matériaux viscoélastiques [52], mais les constructeurs ne fournissent en général aucune information sur l'effet de ce paramètre. On distingue néanmoins trois zones pour l'évolution des comportements et de la sensibilité à l'ajout de masse.

Pour des niveaux de précontraintes faibles (prédéformation statique inférieure à 10%), la corrélation entre les mesures et les prédictions est très bonne. La dispersion sur les résultats est également assez faible, au regard des incertitudes sur le montage (alignements, parallélismes, planéité, *etc.*), la nature et l'épaisseur de la colle utilisée (colle epoxyde bi composants). Cette analyse illustre la bonne représentativité du modèle dans cette plage de faibles prédéformations statiques.

Lorsque la masse augmente, l'écart par rapport au modèle simplifié augmente aussi, lorsque ce niveau de prédéformation est dépassé. Cependant, jusqu'à un niveau de prédéformation de l'ordre de 30%, la tendance de l'évolution de la fréquence reste la même. Un ajout de masse tend à faire diminuer la fréquence.

En revanche, passé ce nouveau seuil de prédéformation statique, l'évolution semble s'inverser. Un nouvel ajout de masse semble augmenter la fréquence propre du système. Le raidissement ainsi induit n'est donc plus négligeable, et il faudra donc veiller à travailler dans une plage où la prédéformation statique est inférieure à 30%. Ce critère a par ailleurs déjà été évoqué dans les travaux de Kergourlay ([52]).



# Chapitre 2

## Modèles de structures amorties

L'existence d'amortissement dans les structures peut nécessiter la prise en compte de termes complexes. La section 2.1 pose les équations du mouvement pour des structures amorties, la notion de description modale pour différents cas d'amortissement. On s'intéresse, dans la section 2.2, à la réduction de modèles viscoélastiques. Un enrichissement au premier ordre des bases classiques réelles de réduction de modèles est étudié. À travers deux exemples, cette section permet de comprendre les mécanismes d'enrichissement des bases de réduction.

### 2.1 Modèles de structures amorties

La section 2.1.1 rappelle les équations du mouvement. La section 2.1.2 considère l'approche MSE [78], approximation classique de modélisation de faibles amortissements. La section 2.1.3 introduit la notion de modes complexes utile pour la modélisation de forts amortissements.

#### 2.1.1 Équations du mouvement

Tous les développements de cet exposé sont réalisés dans le cadre de méthodes d'approximation par éléments finis (MEF). La méthode des éléments finis consiste à utiliser une approximation simple des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles provenant de la modélisation d'un système physique en équations algébriques. Les codes de calcul permettent ainsi de résoudre des problèmes de dynamique des structures complexes et les logiciels de pré- et post-traitement apportent une aide précieuse à la mise en œuvre et à l'exploitation des résultats. Dhatt et Touzot [27] proposent une présentation détaillée de la méthode.

Pour un système non amorti discrétisé en  $N$  degrés de liberté (ddl), l'évolution temporelle de ses mouvements est alors décrite par

$$[M] \{\ddot{q}(t)\} + [K] \{q(t)\} = \{F(t)\}, \quad (2.1)$$

où  $M$  est la matrice de masse,  $K$  la matrice de raideur,  $q$  et  $\ddot{q}$  les vecteurs de déplacement et d'accélération associés à chaque ddl du système et  $F$  le vecteur des efforts extérieurs appliqués au système.

La transformée de Laplace de cette équation donne

$$(Ms^2 + K) \{q(s)\} = \{F(s)\}. \quad (2.2)$$

Pour des conditions initiales nulles, la transformée de Laplace coïncide avec celle de Fourier en posant  $s = i\omega$  où  $\omega$  est une pulsation en  $rad.s^{-1}$ .

La représentation fréquentielle permet de proposer les équations de mouvement pour des systèmes amortis, quelque soit le type d'amortissement :

$$\left( Ms^2 + Cs + \left[ \tilde{K}(s) + iB(s) \right] \right) \{q(s)\} = \{F(s)\}, \quad (2.3)$$

où les matrices  $C$  et  $B$  représentent respectivement les matrices d'amortissement visqueux et hystérétique.

La dépendance en fréquence des matrices  $K$  et  $B$  est directement liée à celle des matériaux viscoélastiques présentés au chapitre 1. À partir de l'équation (1.2), on peut écrire les matrices élémentaires de raideur  $K^e(\Lambda)$ . Dans le cas particulier d'un module d'Young dépendant de la fréquence  $E(s)$ , on obtient des matrices élémentaires  $K^e(E)$  dépendant linéairement de  $E$ . L'assemblage des matrices élémentaires nous donne une matrice de raideur dont on peut séparer les termes élastiques  $K_e$  des termes viscoélastiques  $\frac{E_v(s)}{E_0} K_{v_0}$

$$K(s) = \sum_e K^e = K_e + \frac{E_v(s)}{E_0} K_{v_0}. \quad (2.4)$$

On peut alors séparer la matrice de raideur  $K$  en deux termes, l'un,  $K_0$ , réel, indépendant de la fréquence, l'autre,  $K_S(s)$ , dépendant de la fréquence

$$\begin{aligned} K(s) &= \underbrace{K_e + Re(K_{v_0})}_{K_0} + \underbrace{iIm(K_{v_0}) + \left(\frac{E_v(s)}{E_0} - 1\right)K_{v_0}}_{K_S(s)}. \\ &= K_0 + K_S(s) \end{aligned}$$

Pour des facilités d'écriture, on peut intégrer le terme  $Cs$  d'amortissement visqueux dans  $K_S(s)$ .

La matrice de rigidité dynamique  $Z(s)$  d'un système s'écrit alors

$$Z(s) = Ms^2 + K(s) = Ms^2 + K_0 + K_S(s) \quad (2.5)$$

dont on peut extraire une matrice  $Z_0(s) = Ms^2 + K_0$  définissant le problème nominal non amorti associé, pour une fréquence donnée. On prend en général  $E_0 = \max(\operatorname{Re}(E(s)))$  pour améliorer le rayon de convergence des algorithmes itératifs.

Comme pour les modèles d'états utilisés en automatique, il convient en dynamique des structures de distinguer états (appelés degrés de liberté et notés  $q$ ), entrées et sorties. Cette distinction conduit à exprimer les modèles mécaniques classiques sous la forme [9]

$$[Z(s)]_{N \times N} \{q(s)\}_{N \times 1} = [b]_{N \times N_A} \{u(s)\}_{N_A \times 1} \quad (2.6)$$

$$\{y(s)\}_{N_S \times 1} = [c]_{N_S \times N} \{q(s)\}_{N \times 1}, \quad (2.7)$$

où  $u$  les entrées du système et  $y$  les sorties. Les matrices  $b$  et  $c$  sont respectivement les matrices de commandabilité et d'observabilité. Elles permettent de lier facilement les données expérimentales (entrées et sorties) aux ddl  $q$  du modèle éléments finis, ce qui sera utile en modification structurale (chapitre 4).

Dans de nombreuses applications (structures amorties avec des matériaux viscoélastiques par exemple), il peut être intéressant de considérer également la dépendance en température ou par rapport à d'autres variables d'environnement. Pour les matériaux viscoélastiques, on a vu que la dépendance vis-à-vis de ces variables d'environnement peut être prise en compte simplement avec un décalage fréquentiel. On peut donc définir, de la même manière, une matrice  $K_0$ , réelle, constante définie pour une fréquence et une température (ou une autre variable d'environnement) données, en considérant un scalaire  $E_v(s, T)$  dans (2.4).

### 2.1.2 MSE (Modal Strain Energy)

L'hypothèse d'amortissement modal sur une structure élastique conduit à une décomposition spectrale

$$[H(s)] = \sum_{j=1}^N \frac{c \{\phi_j\} \{\phi_j\}^T b}{(s^2 + 2s\omega_j\xi_j + \omega_j^2)}. \quad (2.8)$$

où  $\{\phi_j\}$  et  $\omega_j^2$  sont les solutions (vecteurs et valeurs propres) du problème non amorti

$$- [M] \{\phi_j\} \omega_j^2 + [K_0] \{\phi_j\} = \{0\}. \quad (2.9)$$



et  $\xi_j$  sont les coefficients d'amortissement modaux associés à chaque mode propre  $\{\phi_j\}$ .

La méthode MSE (Modal Strain Energy [78]) cherche à utiliser cette même décomposition pour approcher la dynamique de structures dont l'amortissement est plus complexe.

Pour le problème défini par 2.9, les conditions d'orthogonalité par rapport à la masse et à la raideur s'expriment sous la forme

$$\{\phi_i\}^T [M] \{\phi_j\} = \mu_j \delta_{ij} \quad (2.10)$$

$$\{\phi_i\}^T [K_0] \{\phi_j\} = \mu_j \omega_j^2 \delta_{ij} \quad (2.11)$$

où les scalaires  $\mu_j$  correspondent à la norme en masse du vecteur propre  $\phi_j$ . On les nomme masses généralisées. Les vecteurs  $\phi_j$  sont généralement normés par rapport à la masse, i.e.  $\mu_j = 1$ . Les autres définitions habituelles consistent à normaliser un composante du vecteur ( $c\tilde{\phi}_j = 1$ ) ou le vecteur complet sur les ddl considérés ( $\|\tilde{\phi}_j\|_2 = 1$ ). Le vecteur normalisé en masse est alors donné par  $\{\phi_j\} = \{\tilde{\phi}_j\} (\mu_j)^{-1/2}$ . On note que le choix de capteurs est, dans ce cas, susceptible de modifier la définition de la masse généralisée alors que le vecteur normalisé en masse est toujours défini de manière unique. Dans la suite de l'exposé, on considère que les vecteurs sont normés par rapport à la masse, i.e.  $\mu_j = 1, \forall j$ .

La base de projection définie par  $T = [\phi_1 \dots \phi_N]$  permet de construire les modèles réduits par transformation congruente. Dans les coordonnées résultant de cette transformation, dites coordonnées principales, les matrices de masse et de rigidité sont diagonales. Mais ce n'est généralement pas le cas de  $T^T (K(s) - K_0) T$ . Le problème (2.3) se ré-écrit sous la forme

$$(s^2 [1] + [\omega_j^2] + T^T (K(s) - K_0) T) \{\eta_g(s)\} = [T^T b] \{u\} \quad (2.12)$$

où  $\{\eta_g(s)\}$  est le vecteur de coordonnées principales. Les termes hors diagonaux de  $T^T (K(s) - K_0) T$  sont interprétés comme des coefficients de couplage entre les modes propres [9]. L'amortissement est qualifié de non-proportionnel.

Dans le cadre de la MSE, on veut approcher l'expression (2.12) par

$$(s^2 [1] + s [2\xi_j \omega_j] + [\omega_j^2]) \{\eta_g(s)\} = [T^T b] \{u\}. \quad (2.13)$$

Ceci revient à supposer que les coefficients non-diagonaux  $\phi_j^T \text{Im}(K) \phi_k, j \neq k$  sont négligeables et à considérer des coefficients d'amortissement modaux équivalents  $\xi_j$  donnés par

$$\{\phi_j\}^T \text{Im}(K) \{\phi_j\} = 2\xi_j \omega_j s, \quad \text{en } s = i\omega_j. \quad (2.14)$$

Ce passage implique également que  $\phi_j^T Re(K(s) - K_0)\phi_k = 0$ , i.e. on néglige la variation de la rigidité avec la fréquence pour chaque équation normale pour supposer que seule la rigidité du mode à sa fréquence propre  $\omega_j$  n'intervient dans la superposition. Ce point est discuté sur un exemple en fin de section 2.2.2.

Pour des amortissements faibles et des modes séparés, on vérifie que l'approximation de la MSE permet de disposer d'une modélisation simple et efficace sous forme d'amortissement modal pour des amortissements plus complexes.

Le critère de Hasselman [42]

$$\frac{2\xi_j\omega_j}{|\omega_j - \omega_k|} \ll 1, \quad (2.15)$$

permet de quantifier le découplage entre les modes. Il signifie que la largeur de bande du  $j^{\text{ème}}$  mode  $2\xi_j\omega_j$  est très petite devant la séparation en fréquence avec le  $k^{\text{ème}}$  mode. Les termes de couplage entre les modes  $j$  et  $k$  sont alors négligeables car il n'y a pas de recouvrement de bande passante.

Dans le cas particulier d'un modèle à amortissement visqueux et hystérétique, les coefficients d'amortissement modaux équivalents  $\xi_j$  s'expriment sous la forme

$$\xi_j = \left( \{\phi_j\}^T [C] \{\phi_j\} + \frac{1}{\omega_j} \{\phi_j\}^T [B] \{\phi_j\} \right) \quad (2.16)$$

Pour un modèle aux éléments finis, les matrices de dissipation utilisées sont reliées aux modules complexes des matériaux viscoélastiques par (1.3). Pour un modèle expérimental (voir section 4.1.1), la nature de l'amortissement ne peut en général être connue. On suppose donc un amortissement modal visqueux et on identifie les taux d'amortissements  $\xi_{j\text{test}}$ . Ce modèle permet de reproduire le comportement dynamique mesuré, sans présager de la nature réelle du mécanisme local de dissipation.

### 2.1.3 Modes complexes

$H(s) = c[Z^{-1}]b$  est une fonction analytique du plan complexe. Elle peut donc être approchée par une décomposition en éléments simples à partir de son développement en série de Laurent [8] autour de ses pôles  $\lambda_j$

$$H(s) = \sum_{j=1}^{2N} \frac{\{c\psi_{jR}\}\{\psi_{jL}^T b\}}{\alpha_j(s - \lambda_j)} + O(1). \quad (2.17)$$

Les modes (singularités du développement de Laurent) sont solutions d'un problème au second ordre

$$[Z(\lambda_j)]_N \{\psi_{jR}\} = 0 \quad \text{et} \quad \{\psi_{jL}\} [Z(\lambda_j)]_N = 0. \quad (2.18)$$

On a des modes, dits à gauche  $\{\psi_{jL}\}$  et à droite  $\{\psi_{jR}\}$ , associés aux mêmes pôles  $\lambda_j$ . Pour une structure réciproque (hypothèse en mécanique), on a de plus  $\{\psi_{jR}\} = \{\psi_{jL}\}$ . Les  $\alpha_j$  sont des coefficients de normalisation associés au développement de Laurent.

Avec des matrices fixes, une des approches de résolution les plus usuelles est de considérer un modèle du premier ordre équivalent de dimension  $2N$

$$\left( \begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \lambda_j + \begin{bmatrix} K + iB & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix} \right) \{\theta_j\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

où on montre facilement que

$$[\theta] = \begin{bmatrix} [\psi]_{N \times 2N} \\ [\lambda_j]_{N \times 2N} \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

On donne le nom de mode complexe à la fois à  $\{\psi_j\}$  et  $\{\theta_j\}$ . L'existence de  $2N$  vecteurs diagonalisant les matrices de (2.19) est équivalente à la vérification de deux conditions de normalisation

$$\begin{aligned} \{\theta\}^T \begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \{\theta\} &= \psi^T C \psi + \lambda \psi^T M \psi + \psi^T M \psi \lambda = [\alpha_j], \\ \{\theta\}^T \begin{bmatrix} K + iB & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix} \{\theta\} &= \psi^T (K + iB) \psi - \lambda \psi^T M \psi \lambda = [\beta_j]. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Pour des modèles mécaniques du second ordre et dans le cas d'amortissement visqueux ( $B = 0$ ), la résolution de l'équation (2.19) procure des paires conjuguées de valeurs et vecteurs propres. L'expression de la flexibilité dynamique  $[H(s)]$  peut donc prendre la forme

$$H(s) = \sum_{j=1}^N \left( \frac{\{c\psi_j\}\{\psi_j^T b\}}{\alpha_j(s - \lambda_j)} + \frac{\{c\bar{\psi}_j\}\{\bar{\psi}_j^T b\}}{\bar{\alpha}_j(s - \bar{\lambda}_j)} \right). \quad (2.22)$$

En revanche, dans le cas d'un amortissement hystérétique ( $B \neq 0$ , constant,  $C = 0$ ), les valeurs propres du système viennent non pas en paires conjuguées, mais en paires opposées.  $[H(s)]$  s'exprime, dans ce cas particulier, sous la forme

$$H(s) = \sum_{j=1}^N \left( \frac{\{c\psi_j\}\{\psi_j^T b\}}{\alpha_j(s - \lambda_j)} + \frac{\{c\psi_j\}\{\psi_j^T b\}}{-\alpha_j(s + \lambda_j)} \right). \quad (2.23)$$

Il faut néanmoins remarquer que le modèle d'amortissement hystérétique ( $B$  constant) n'est pas physique. En effet les pôles à partie imaginaires négatives ne sont

pas stables. La transformée inverse de Fourier fait apparaître des problèmes de non-causalité. Pour échapper à ce biais, il est nécessaire de considérer une matrice d'amortissement hystérétique non constante telle que  $B(\omega) = -B(-\omega)$ . En pratique, on calcule donc les modes à partie imaginaire positive et utilise (2.22) pour synthétiser la réponse.

Pour des cas où le comportement de la structure dépend de la fréquence, il est possible d'utiliser (2.19) avec  $K(iIm(\lambda_j))$  et  $B(iIm(\lambda_j))$  pour calculer le mode  $(\{\psi_j\}, \lambda_j)$ . Si l'évolution du comportement en fonction de la fréquence n'est pas trop rapide, i.e. un mode calculé à une fréquence diffère peu du même mode calculé aux fréquences alentours, l'équation (2.22) permet de réaliser une synthèse modale de bonne qualité. Un exemple est développé en fin de section 2.2.2.

## 2.2 Réduction de modèles viscoélastiques

Pour de nombreuses applications, il est intéressant de réduire le problème sur un sous-espace particulier. Le comportement de chaque sous-structure est alors caractérisé par un nombre de ddls généralisés largement inférieur au nombre de ddls physiques ce qui permet de réduire considérablement la taille du problème.

Pour des systèmes amortis, l'utilisation de bases complexes est possible [85], mais on propose d'étudier ici une base réelle modale augmentée par une base de correction pour tenir compte des efforts et des effets amortissants. La section 2.2.1 donne la forme de l'enrichissement pour un système ayant une matrice d'amortissement hystérétique. Les deux sections suivantes analysent des exemples simples, l'un avec amortissement localisé, l'autre avec amortissement réparti. Ces exemples permettent d'illustrer la nature de l'enrichissement.

### 2.2.1 Enrichissement par des termes de correction statique

Les modes normaux qui entrent classiquement dans la composition des bases de réduction proviennent de la résolution du problème aux valeurs propres. On imagine aisément que, si le problème posé implique, en plus des matrices de masse et de raideur, des matrices d'amortissement, alors, les modes propres ne pourront être suffisants pour rendre compte du comportement du système.

Considérons un système soumis à un effort extérieur

$$[Z(s)] \{q\} = [b] \{u(s)\}. \quad (2.24)$$

On peut ré-écrire le problème en plaçant à droite la partie de la raideur complexe dépendant de la fréquence  $B_V = (K(s) - K_0)$ , et notamment la partie imaginaire correspondant à l'amortissement, qui peut être perçue, selon qu'on place le terme à gauche ou à droite de l'équation, comme un terme interne au système ou comme un terme d'effort de perturbation du système conservatif.

$$[Ms^2 + K_0] \{q\} = [b] \{u(s)\} - (K(s) - K_0) \{q\}. \quad (2.25)$$

On étudie les bases suivantes.

$T_0$  composée des  $n$  premiers modes normaux.  $T_0 = [\phi_{1:n}]$

$T_1$  construite à partir des précédents modes normaux et d'un mode de correction statique associé à l'effort d'entrée  $b$ ,  $\tilde{T}_1 = [\phi_{1:n} \quad K_0^{-1}b]$ . Il est classique de considérer la flexibilité résiduelle

$$T_1 = \left[ \phi_{1:n} \quad K_0^{-1}b - \sum_{j=1}^n \frac{\phi_j^T \phi_j b}{\omega_j^2} \right] \quad (2.26)$$

Mais plus généralement, on peut orthogonaliser  $\tilde{T}_1$  en masse et en raideur

$$T_1^T M T_1 = [Id], \quad (2.27)$$

$$T_1^T K T_1 = \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & \omega_i^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}_{i=1:n_1}. \quad (2.28)$$

$T_2$  est construite sur le même principe que la base  $T_1$  sauf que les modes de correction statique associés aux efforts viscoélastiques sont pris en compte.

On sait que l'enrichissement des bases des premiers modes propres  $[\phi_{1:n}]$  par le relèvement statique de l'effort d'entrée  $K_0^{-1}b$  permet de corriger le niveau global des réponses fréquentielles en apportant la contribution statique de modes de plus haute fréquence. Enrichir la base des modes propres par le relèvement statique des efforts viscoélastiques paraît alors naturel.

Deux cas peuvent se présenter :

- Pour un amortissement localisé, le sous-espace engendré par les colonnes de  $B_V$ , la partie du système liée à l'amortissement, est de dimension 1 et l'enrichissement correspond simplement au sous-espace de dimension 1 engendré par  $K_0^{-1}B_V$ .

$$\tilde{T}_2 = [\phi_{1:n} \quad K_0^{-1}b \quad K_0^{-1}B_V]. \quad (2.29)$$

- Pour un amortissement réparti, la dimension de  $B_V$  est trop grande pour envisager un tel enrichissement. On ne considérera alors que la projection de  $B_V$  sur la base de modes propres, soit les termes d'enrichissement  $K_0^{-1}B_V\phi_{1:n}$

$$\tilde{T}_2 = [\phi_{1:n} \quad K_0^{-1}b \quad K_0^{-1}B_V\phi_{1:n}]. \quad (2.30)$$

La base  $\tilde{T}_2$  ainsi construite peut comporter des vecteurs très colinéaires. Il convient donc de la ré-orthogonaliser. La ré-analyse du système réduit permet ensuite de ranger la base par ordre de régularité et d'éventuellement tronquer en supprimant les modes de plus hautes fréquences pour améliorer le conditionnement du problème. On obtient ainsi la base  $T_2$  qui représente un espace vectoriel comportant les modes de plus basse fréquence.

### 2.2.2 Cas d'un amortissement localisé

Considérons le cas-test de la figure 2.1. Il s'agit de deux poutres de section circulaire (diamètre 1cm, longueur 20cm, en acier). La liaison entre ces deux poutres est assurée par un pivot et un ressort de torsion amortissant. L'ensemble est excité par un effort ponctuel  $b$  montré sur la figure. Les transferts affichés sont observés au même point.

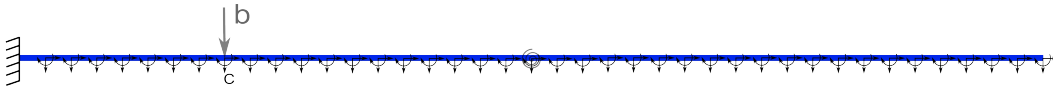


FIG. 2.1 – Schéma de cas test. Poutres liées par un ressort de torsion amortissant.

On choisit de considérer le problème en deux dimensions. On dispose d'une matrice de masse  $m_{init}$  et d'une matrice de raideur  $k_{init}$  pour chacune des deux poutres.

Afin de modéliser le ressort de torsion, on impose :

- le dédoublement des ddl d'interface
- la continuité des translations sur les ddl d'interface (par élimination)
- une raideur sur le ddl de rotation relativement faible.

$$k_{rot} = \alpha \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\alpha_0$  vaut la moitié de  $K_{\vartheta_z\vartheta_z}$ , raideur en rotation en un autre nœud. Le cas  $\alpha_{-n} = \alpha_0 \times 10^{-n}$  correspond à un couplage où la raideur en rotation est  $10^n$  fois plus faible sur le ddl d'interface que sur les autres ddl de rotation. La matrice d'amortissement est obtenue selon le même principe avec différents facteurs de perte pour les matrices initiale ( $\eta_{poutre} \times k_{init}$ ) et de couplage ( $\eta_{joint} \times k_{rot}$ ).

Dans cette section, afin d'étudier isolément l'effet de l'amortissement apporté par le joint de torsion, on choisit un amortissement nul pour les poutres. Ainsi on obtient un unique mode de correction statique associé aux efforts viscoélastiques.

Les efforts viscoélastiques sont alors tous proportionnels à un moment relatif au niveau du ressort de torsion.

La figure 2.2 nous montre le contenu de la base  $T_2$  composée des modes normaux, du mode de correction statique associé à l'effort d'entrée et un mode d'enrichissement (également un mode de correction statique) associé aux efforts viscoélastiques appliqués au système conservatif. Il s'agit effectivement du mode statique obtenu par l'application d'un couple relatif sur les ddl de rotation où l'amortisseur est présent.

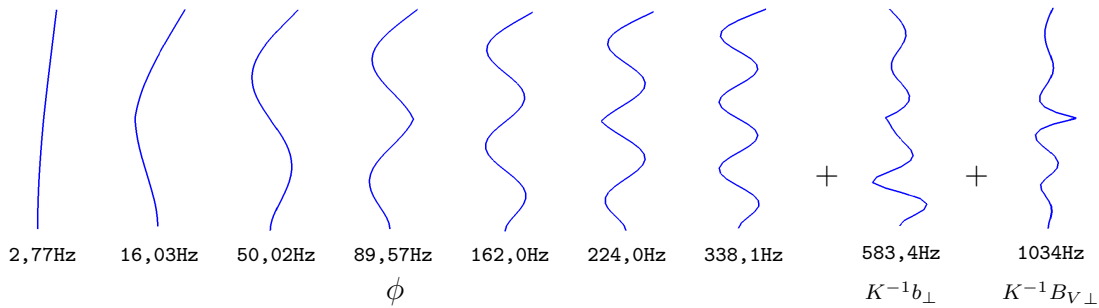


FIG. 2.2 – Modes composants la base de réduction  $T_2$  pour  $\alpha_{-1}$  et  $\eta_{joint} = 1,5$ . 7 modes normaux, 1 mode de correction statique associé à l'effort d'entrée  $b$  et un autre associé aux efforts viscoélastiques.

L'examen du contenu des différentes bases de réduction nous permet de comprendre le mécanisme de la synthèse modale. Comme il a été dit précédemment, les modes de correction statique permettent de prendre en compte les contributions d'efforts extérieurs appliqués au système conservatif homogène associé. Le processus de ré-analyse du problème réduit nous procure les fréquences propres et les modes propres associés. Ainsi on peut vérifier que les modes qui complètent la base de réduction d'origine ne sont pas des modes de fréquence trop élevée qui compromettraient le conditionnement du problème et les tronquer le cas échéant.

La figure 2.3 ainsi que le tableau 2.1 montrent quelles sont les différences associées à l'utilisation des différentes bases de réduction.

La figure 2.3 montre tout d'abord que les modes pour lesquels le pivot coïncide avec un nœud de vibration ne sont pas amortis. En effet, pour ces modes, la rupture de pente entre les deux poutres est nulle, l'amortisseur ne travaille pas et ne dissipe donc pas d'énergie. On voit de plus que la base  $T_2$  permet d'obtenir une réponse quasiment identique à celle calculée sans réduction. L'écart des résultats selon les bases est dû à leur capacité à décrire la déformation de l'amortisseur, *i.e.* dans notre cas, à décrire l'angle  $\Delta\theta$  au niveau du joint.

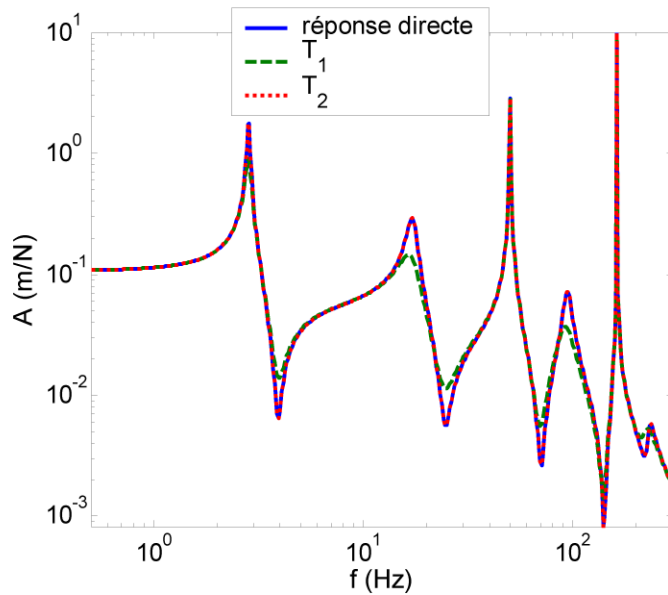


FIG. 2.3 – FRF du cas test synthétisées à partir de modes complexes calculés sur modèle réduit sur différentes bases. La courbe pointillée est quasiment superposée sur la réponse directe.



N° mode	$\alpha_{-3}$				$\alpha_{-1}$			
	T1		T2		T1		T2	
	$f$ (Hz)	$\xi$ (%)	$f$ (Hz)	$\xi$ (%)	$f$ (Hz)	$\xi$ (%)	$f$ (Hz)	$\xi$ (%)
1	1,4	39,2	1,4	38,7	2,8	2,9	2,8	1,3
2	8,5	7,1	8,5	7,1	16,9	11,2	17,1	5,3
3	50,0	0,0	50,0	0,0	50,0	0,0	50,0	0,0
4	72,5	1,0	72,5	1,0	91,7	9,1	94,0	4,5
5	162,0	0,0	162,0	0,0	162,0	0,0	162,0	0,0
6	200,6	0,4	200,6	0,4	224,7	7,1	232,0	4,0
7	338,1	0,0	338,1	0,0	338,1	0,0	338,1	0,0

TAB. 2.1 – Fréquences et amortissements calculés à partir des modèles réduits sur différentes bases et pour différentes valeurs de  $\alpha$ .  $\eta_{poutre} = 0$  et  $\eta_{joint} = 1, 5$ .

L'effet de la réduction sur les bases  $T_1$  ou  $T_2$  dépend très largement de la valeur de  $\alpha$  qui fixe la raideur du joint. Le tableau 2.1 donne les fréquences propres et les amortissements modaux pour deux valeurs de  $\alpha$  calculées avec la base  $T_1$  d'une part et la base  $T_2$  d'autre part. On voit que pour une valeur faible de la raideur ( $\alpha = \alpha_{-3}$ ), l'utilisation de la base  $T_2$  n'est pas nécessaire.

Pour des valeurs faibles de  $\alpha$ , les modes font travailler le ressort de torsion, la correction statique n'est donc pas très utile. Pour  $\alpha$  plus élevé, ce n'est plus le cas et le moment relatif des deux poutres doit être considéré pour représenter correctement l'amortissement.

La figure 2.4 montre tout d'abord qu'il existe une raideur optimale pour laquelle l'amortissement est maximal. Cette raideur optimale évolue selon la gamme de fréquence sur laquelle on cherche à amortir la réponse. On remarque que plus on s'éloigne de la raideur optimale (plus l'amortissement est faible), plus l'enrichissement de la base  $T_2$  devient obsolète. Ce résultat était attendu. En effet, si la raideur du joint est trop faible, aucune énergie n'est apporté au joint et il n'y a pas de dissipation. Dans le cas inverse où la raideur du joint est très importante, le joint ne travaille pas et ne dissipe donc pas d'énergie. Dans les deux cas, on s'approche donc d'un système non amorti et la base  $T_2$  n'apporte alors plus d'information intéressante à prendre en compte.

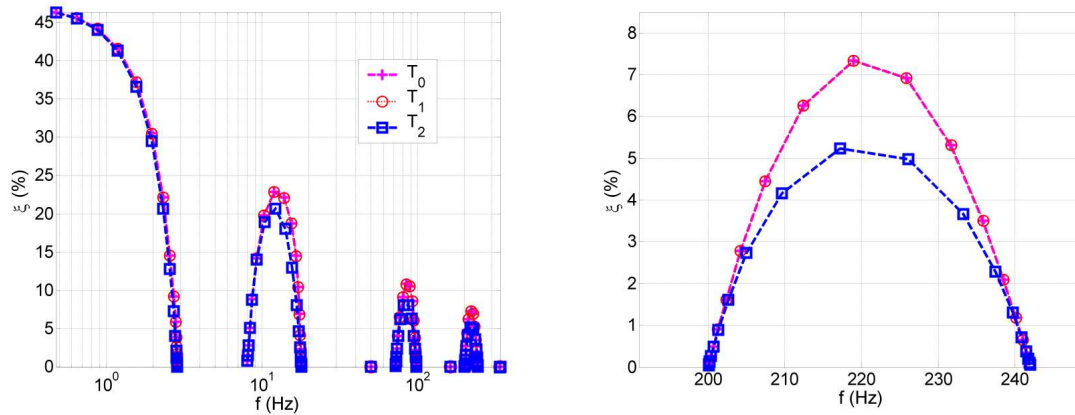


FIG. 2.4 – Évolution de l'amortissement modal en fonction de la raideur du joint (de 0,0001 à 10 fois la raideur initiale) selon les bases de réduction  $T_0$ ,  $T_1$  et  $T_2$ .

En ce qui concerne l'évolution des réponses en fonction du facteur de perte associé à l'amortisseur (figure 2.5), il est intéressant de noter que plus le facteur de perte augmente, plus l'écart entre les résultats obtenus avec  $T_1$  d'une part et  $T_2$  d'autre part augmente. De plus la base  $T_2$  permet de modéliser le fait qu'il existe un facteur de perte optimal pour lequel l'amortissement est maximal contrairement à  $T_0$  ou  $T_1$ .

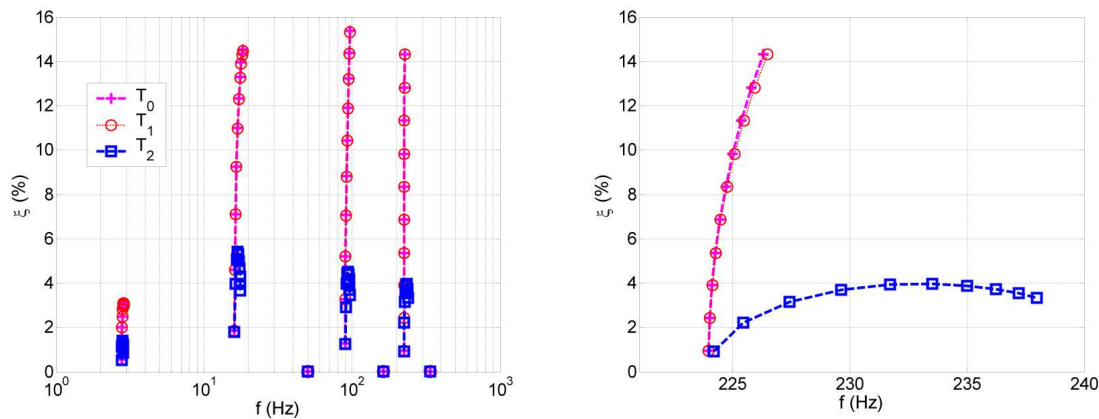


FIG. 2.5 – Évolution de l'amortissement modal en fonction du facteur de perte du joint (de 0, 2 à 3) avec  $\alpha = \alpha_{-1}$ , selon la base de réduction utilisée.

On a vu sur la figure 2.3 que pour des matrices caractéristiques constantes, la

synthèse modale (2.22) permet une bonne reconstruction des transferts. Pour le calcul de transferts de structures dont le comportement dépend de la fréquence (structures incluant des matériaux viscoélastiques par exemple), il faut alors se demander quelle est l'influence de l'évolution en fréquence du comportement sur la synthèse.

Dans cette section, on choisit une évolution de comportement arbitraire d'un matériau fictif. Cette étude est reprise en section 5.5.2, sur un démonstrateur plus complexe, en considérant le comportement d'un matériau viscoélastique réel.

Si on impose l'évolution du comportement de l'élément dissipatif de la figure 2.6 sur le cas test de cette section, on sait que les fréquences propres et les amortissements des modes évoluent (figure 2.7).

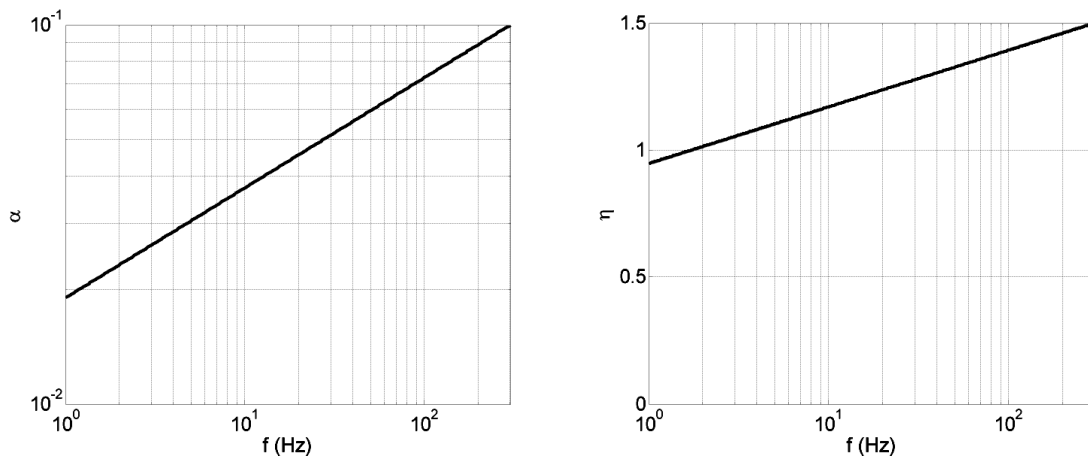


FIG. 2.6 – Exemple de loi d'évolution de  $\alpha$  et du facteur de perte  $\eta$  du joint en fonction de la fréquence.

La figure 2.7 montre les courbes maîtresses des couples fréquence/amortissement  $\{f_0, \xi_0\}$  des six premiers modes du modèle en fonction de l'évolution du couple  $\{\alpha, \eta\}$  paramètre du comportement. Or à chaque fréquence  $f$  correspond un couple  $\{\alpha, \eta\}$ , donné par la figure 2.6. Pour chaque mode, on peut alors sélectionner le couple  $\{f_{0_i}, \xi_{0_i}\}$  calculé avec les paramètres  $\alpha_{0_i} = \alpha(f_{0_i})$  et  $\eta_{0_i} = \eta(f_{0_i})$ . À l'issue de cette sélection ( $\circ$  sur la figure 2.7), on obtient une famille de modes complexes calculés avec un comportement correspondant à leur fréquence propre.

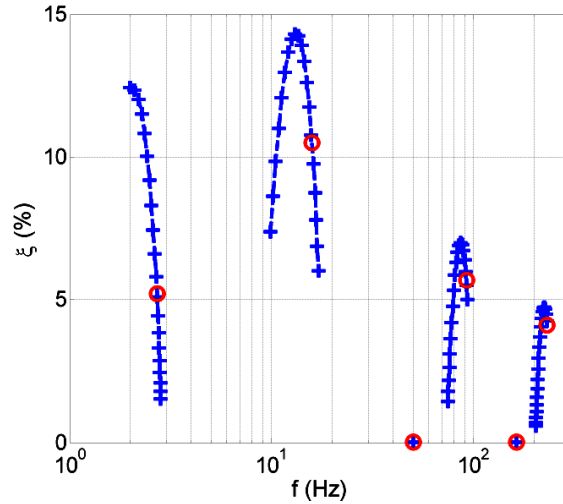


FIG. 2.7 – Évolution de la fréquence propres et de l'amortissement modal des 6 premiers modes en fonction du comportement décrit en figure 2.6.

La synthèse modale calculée à partir de ces modes complexes n'est pas strictement équivalente au calcul de transfert obtenu par inversion directe des matrices caractéristiques. La figure 2.8 montre un transfert calculé pour l'évolution de comportement de la figure 2.6, i.e. à partir des modes complexes sélectionnés. On le compare au transfert calculé directement.

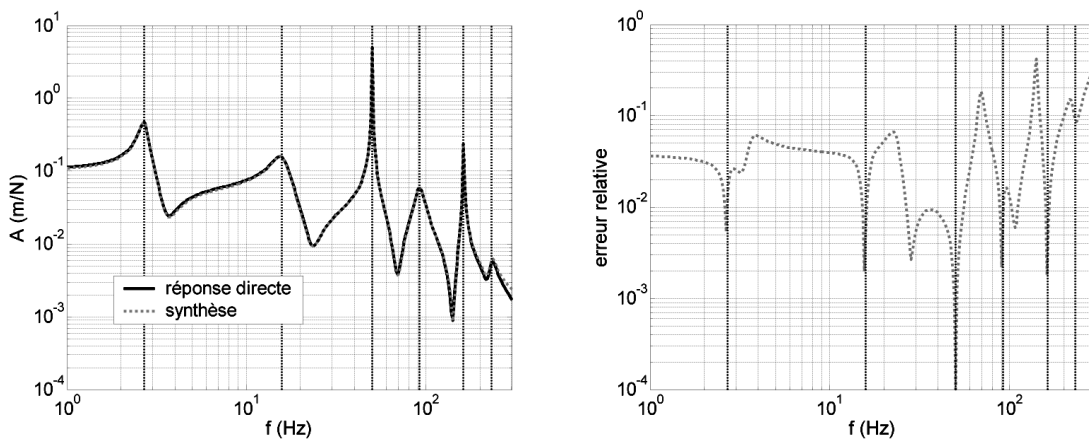


FIG. 2.8 – Transfert direct avec un comportement du joint décrit en figure 2.6, synthèse à partir des modes complexes calculés à leur fréquence propre. Erreur relative entre le transfert direct et la synthèse modale.

On remarque que la synthèse présente les erreurs les plus faibles au niveau des résonances. Les modes étant calculés avec un comportement associé à leur fréquence propre, on a en effet une synthèse de très bonne qualité autour des résonances, lorsque l'influence des modes voisins est la plus faible. En revanche entre les résonances, la synthèse modale ne permet pas de prendre en compte l'évolution selon la fréquence des modes calculés, et on commet donc une erreur. Cette erreur reste très raisonnable et la synthèse modale sera utilisée sous cette forme par la suite.

On voit que l'erreur augmente légèrement pour les fréquences supérieures à  $200\text{Hz}$ . La troncature modale est à l'origine de cette petite divergence.

En considérant une dépendance plus forte du comportement en fonction de la fréquence, l'erreur relative de la synthèse modale augmente. La figure 2.9 présente l'évolution supposée du paramètre  $\alpha$ . Le facteur de perte  $\eta$  a la même loi d'évolution que dans le cas précédent.

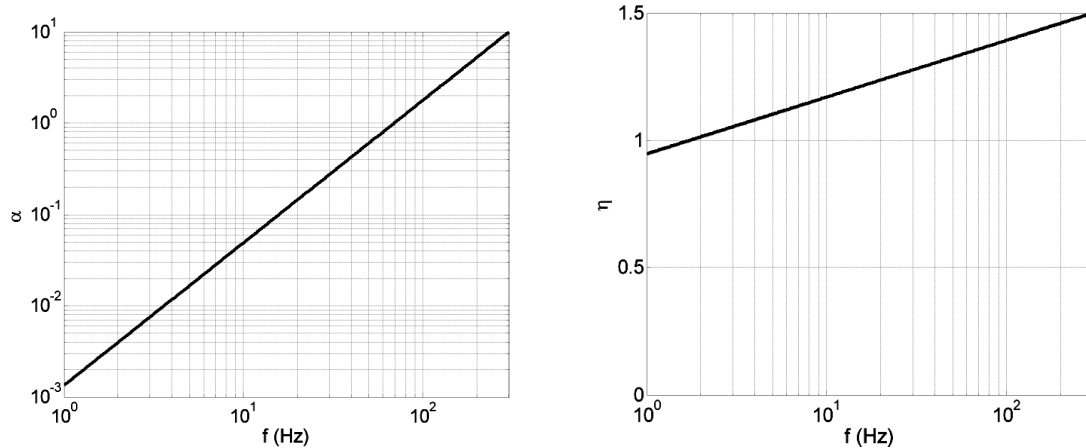


FIG. 2.9 – Exemple de loi d'évolution de  $\alpha$  et du facteur de perte  $\eta$  du joint en fonction de la fréquence.

Pour ce cas d'évolution, l'erreur sur la synthèse modale présentée en figure 2.10 est plus importante que pour le cas d'évolution moins rapide de la figure 2.6.

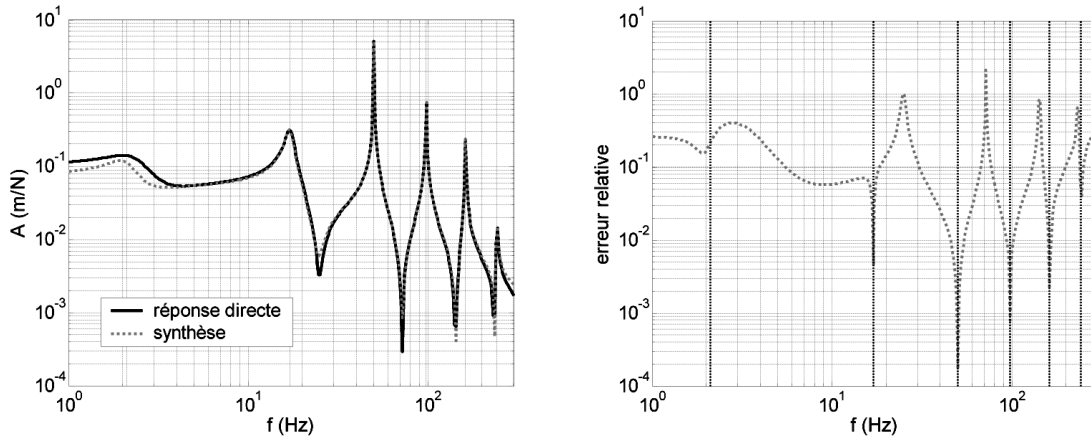


FIG. 2.10 – Transfert direct avec un comportement du joint décrit en figure 2.9, synthèse à partir des modes complexes calculés à leur fréquence propre. Erreur relative entre le transfert direct et la synthèse modale.

La synthèse modale de transferts pour des structures dont le comportement dépend de la fréquence est, on l'a vu, une approximation. Il faut néanmoins remarquer que l'erreur commise est négligeable pour des comportements dont la dépendance fréquentielle n'est pas trop forte. L'utilisation d'un comportement fictif dans cette section a permis de poser la problématique. On verra en section 5.5.2 le cas d'une structure plus complexe avec un comportement viscoélastique réel.

### 2.2.3 Cas d'un amortissement réparti

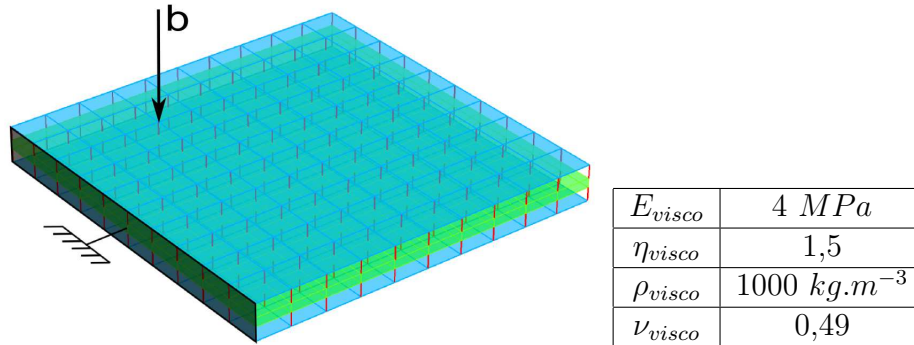


FIG. 2.11 – Schéma de cas test. Couche de matériau viscoélastique contrainte par deux plaques d'acier. Zoom  $\times 10$  dans l'épaisseur. Effort d'entrée  $b$ . Observation au niveau point d'entrée.

Considérons le cas test schématisé sur la figure 2.11. Il s'agit d'une plaque sandwich encastree sur un côté composée de deux plaques d'acier de 20cm de côté contraignant une plaque de matériau viscoélastique. L'épaisseur de la plaque viscoélastique est de 0,5mm ; celle des plaques d'acier de 1,5mm.

L'ensemble est excité par un effort ponctuel  $b$  montré sur la figure 2.11. Les transferts affichés dans la suite sont observé au même point.

Le modèle aux éléments finis du cas test et les caractéristiques matériaux de la couche dissipative sont données en figure 2.11

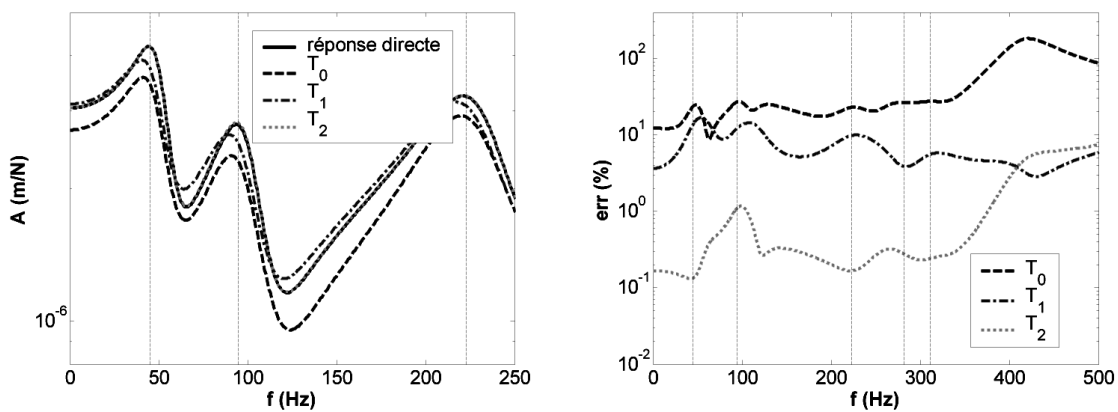


FIG. 2.12 – FRF obtenues par calcul direct et par synthèse modale pour les différentes bases étudiées et erreurs relatives associées.

Comme pour le cas de l'amortissement localisé, on étudie les différentes bases de réduction  $T_0$ ,  $T_1$ , et  $T_2$ . Dans notre cas d'étude, les 7 premiers modes propres de la structure ont été utilisés pour la construction de ces bases. La figure 2.12 montre la convergence des FRF synthétisées par l'enrichissement de la base de réduction. Dans le cas d'un amortissement réparti, la partie  $B_V$  de la rigidité dynamique correspondant à l'amortissement est de dimension élevée (égale au nombre de ddl associés au matériau dissipatif). Il n'est pas envisageable de la considérer telle quelle. On ne considère donc que la projection de  $B_V$  sur la base de modes propres  $\phi_{1:n}$ , soit, dans ce cas d'étude 7 modes d'enrichissement. La procédure de ré-orthogonalisation n'élimine, dans ce cas, aucun vecteur d'enrichissement. On peut néanmoins s'interroger sur l'importance relative de chaque mode d'enrichissement. La contribution orthogonale de ces vecteurs par rapport à  $T_1$  est notée  $T_{visc}$  dans la suite de la section. De plus, l'effet de la correction statique (enrichissement de la base  $T_0$  qui permet d'obtenir  $T_1$ ) est bien connu et  $T_0$  ne sera donc pas considéré par la suite.

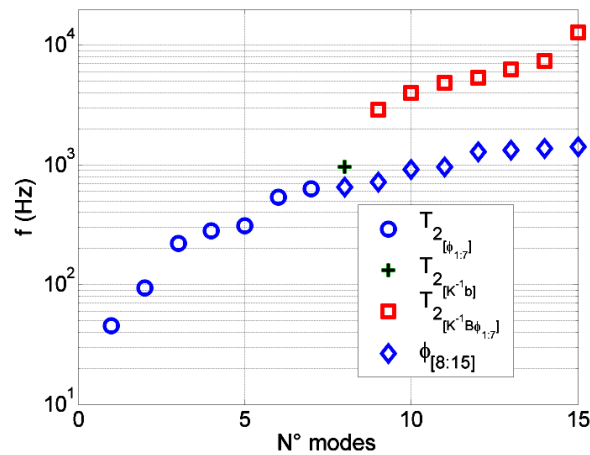


FIG. 2.13 – Évolution des fréquences propres associées aux vecteurs de la base de réduction  $T_2$  et fréquences propres des modes constituant  $T_0$ .

La figure 2.13 nous montre, en premier lieu, les fréquences associées aux vecteurs constituant la base  $T_2$ . On remarque que celles associées aux vecteurs de  $T_{visc}$  sont des fréquences relativement élevées. On peut donc se demander de manière légitime quelle est la contribution de tels vecteurs dans le calcul de réponses aux fréquences considérées.



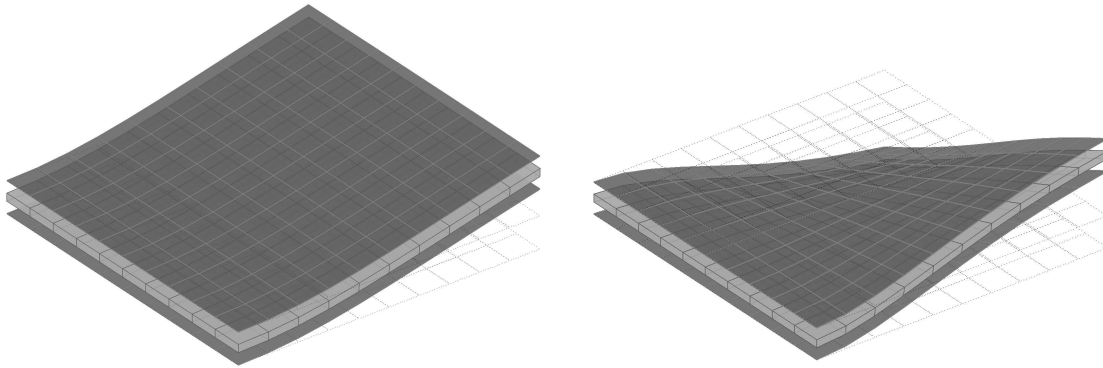


FIG. 2.14 – Modes 1 et 2.

Considérons les deux premiers modes présentés sur la figure 2.14. Ils vont nous permettre de donner une illustration simple de l'enrichissement.

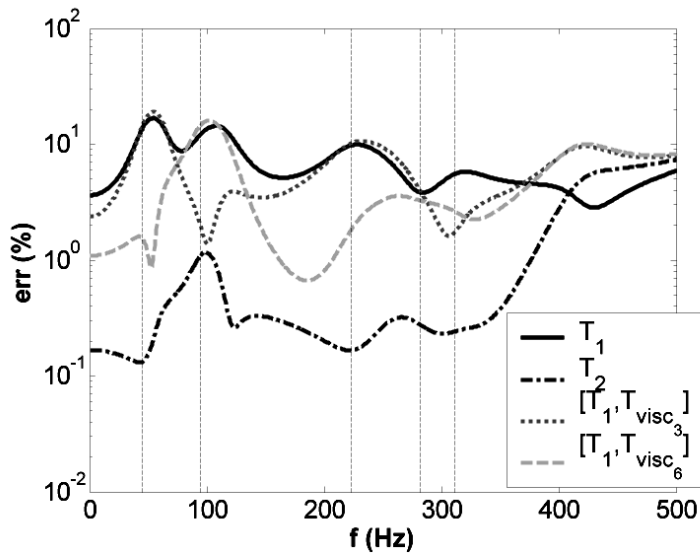


FIG. 2.15 – Erreurs relatives commises sur le calcul d'une réponse fréquentielle pour différentes bases de réduction.

On remarque en effet que, pour un mode donné de la bande de fréquence que l'on cherche à reconstruire, il est généralement possible d'isoler un mode d'enrichissement associé à ce mode. La figure 2.15 montre les erreurs relatives commises sur le calcul d'une réponse fréquentielle pour différentes bases de réduction : les bases  $T_1$  et  $T_2$ , et la base  $T_1$  enrichie d'un vecteur de  $T_{visc}$ .

On voit alors que le troisième mode d'enrichissement associé aux efforts viscoélastiques  $T_{visc_3}$  permet de diminuer largement l'erreur sur le calcul de la réponse principalement autour du mode 2. Le sixième mode d'enrichissement  $T_{visc_6}$  permet de réaliser un gain autour du mode 1.

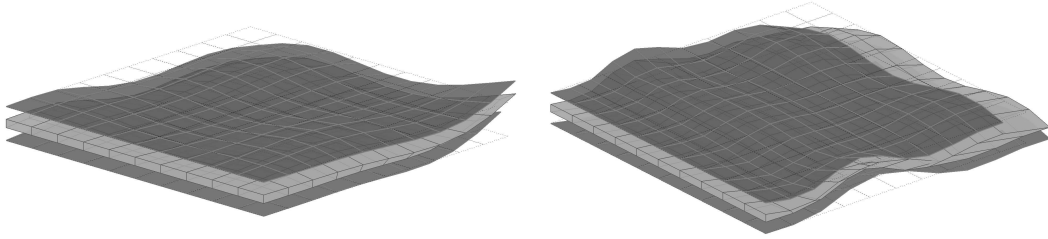


FIG. 2.16 – Troisième et sixième modes d'enrichissement de  $T_{visc}$ .

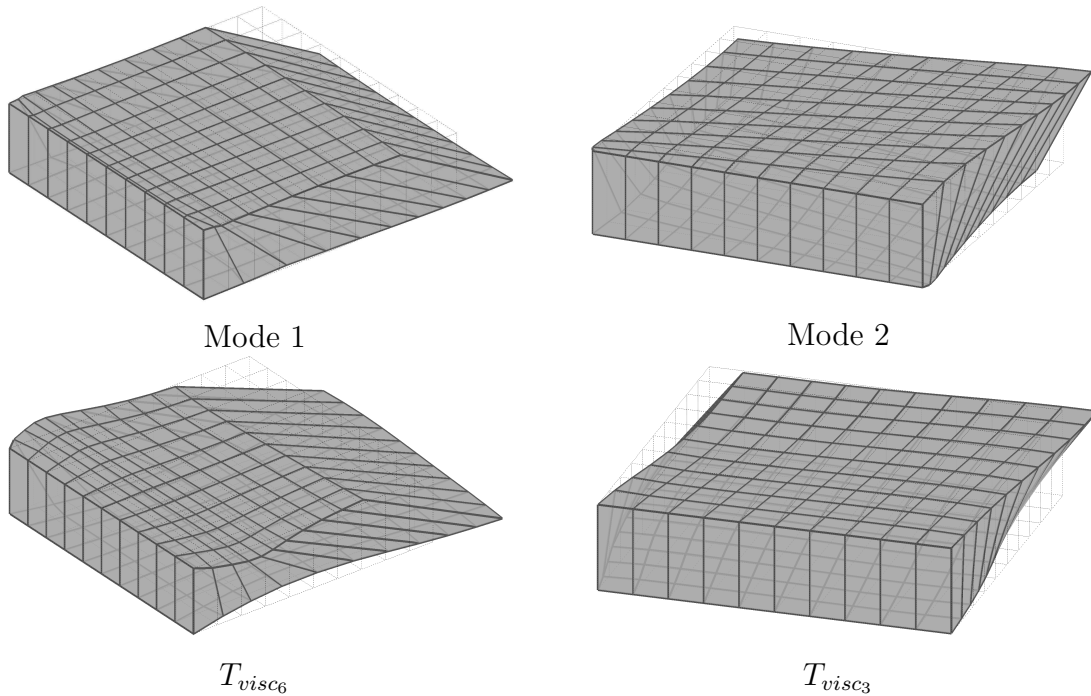


FIG. 2.17 – Modes 1, 2 et  $T_{visc_3}$  et  $T_{visc_6}$  restreints aux ddl de translation  $x$  et  $y$ . Visualisation uniquement de la couche dissipative. Zoom  $\times 100$  dans l'épaisseur.

L'observation de leur déformée telle quelle (fig. 2.16) ne permet pas de comprendre la contribution de ces modes dans la description du comportement vibratoire de la structure autour des modes 1 et 2.

En revanche si on isole les déplacements associés aux ddl du plan de la couche viscoélastique (fig. 2.17), on voit que les modes d'enrichissement font travailler le matériau viscoélastique sur des modes de cisaillement relativement similaires aux modes auxquels ils apportent leur contribution. Le mode 1 fait intervenir un cisaillement du matériau viscoélastique dans la direction  $x$ . Le mode  $T_{visc_6}$  fait travailler la couche viscoélastique sur un mode très proche, mais fait intervenir une compression de la couche dans la direction  $y$  qui fait penser aux caractéristiques d'un essai en traction-compression (prise en compte du coefficient de Poisson). La base  $T_1$  a donc tendance à surestimer l'amortissement dans la couche viscoélastique autour du mode 1 car le cisaillement de la couche est plus important pour le mode 1 que pour le mode  $T_{visc_6}$ . On peut en effet voir sur la figure 2.17 la différence du cisaillement notamment proche de l'encastrement.

Une lecture similaire est possible pour le mode 2 et le mode d'enrichissement  $T_{visc_3}$ . Les deux font travailler la couche viscoélastique sur un mode de cisaillement dans la direction  $y$ , mais le cisaillement de la couche est différent dans la zone proche de l'encastrement. Le mode  $T_{visc_3}$  apporte ainsi une information supplémentaire sur la manière dont la couche viscoélastique travaille.

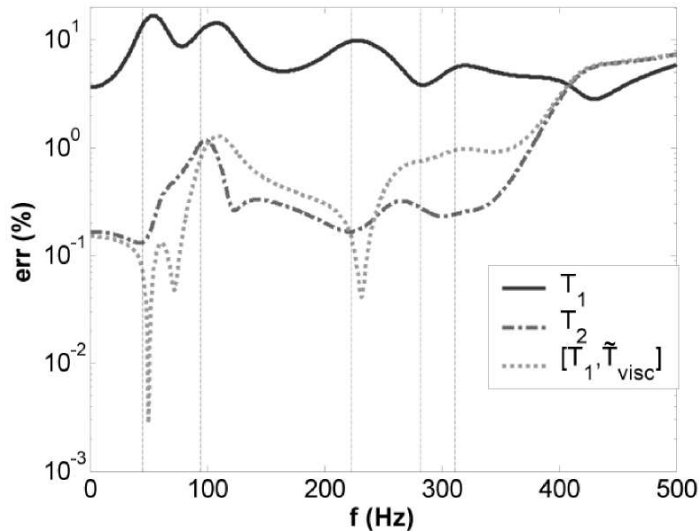


FIG. 2.18 – Erreurs relatives commises sur le calcul d'une réponse fréquentielle pour différentes bases de réduction.

Pour se convaincre que le gain réalisé est principalement dû à l'enrichissement associé au cisaillement de la couche viscoélastique, on peut considérer uniquement la partition de  $T_{visc}$  associée aux ddl de translation sur  $x$  et  $y$ . On la note  $\tilde{T}_{visc}$ . La figure 2.18 montre que le fait de restreindre  $T_{visc}$  aux ddl décrivant le cisaillement de la couche

viscoélastique dégrade certes le niveau atteint par  $T_2$  mais dans de faibles proportions.

À l'issue de ces considérations, il est intéressant de savoir dans quelle mesure il est possible de reconstruire a priori l'information apportée par ces modes d'enrichissement. On a vu que les modes d'enrichissement font travailler la couche viscoélastique sur des modes de cisaillement particuliers. On propose donc de les remplacer par des modes de la structure sur laquelle on impose des chargements standards.

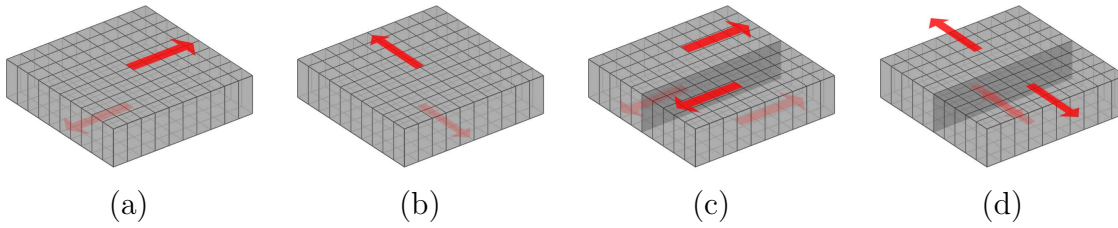


FIG. 2.19 – Chargements standard de couche viscoélastique. (a) et (b) : chargements uniformes opposés sur les ddl des couches supérieures et inférieures dans la direction  $x$ , respectivement  $y$ . (c) et (d) : chargements uniformes opposés sur les ddl de chaque moitié de couches supérieures et inférieures dans la direction  $x$ , respectivement  $y$ .

La figure 2.19 est un exemple de chargements simples à appliquer. En notant  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$  le plan moyen de la plaque, et  $\vec{e}_z$  la direction orthogonale.  $\vec{x}$  la position du point courant sur la plaque. Les chargements standard de la figure 2.19 sont définis comme :

- (a) :  $\vec{f}(\vec{x}) = (\vec{x}, \vec{e}_z) \vec{e}_x$
- (b) :  $\vec{f}(\vec{x}) = (\vec{x}, \vec{e}_z) \vec{e}_y$
- (c) :  $\vec{f}(\vec{x}) = (\vec{x}, \vec{e}_z) \frac{(\vec{x}, \vec{e}_y)}{\|(\vec{x}, \vec{e}_y)\|} \vec{e}_x$
- (d) :  $\vec{f}(\vec{x}) = (\vec{x}, \vec{e}_z) \frac{(\vec{x}, \vec{e}_y)}{\|(\vec{x}, \vec{e}_y)\|} \vec{e}_y$

Les deux premiers chargements (a) et (b) font travailler la couche viscoélastique sur des modes de cisaillement simple ; les deux suivants (c) et (d) la font travailler sur des modes de cisaillement plus complexes.

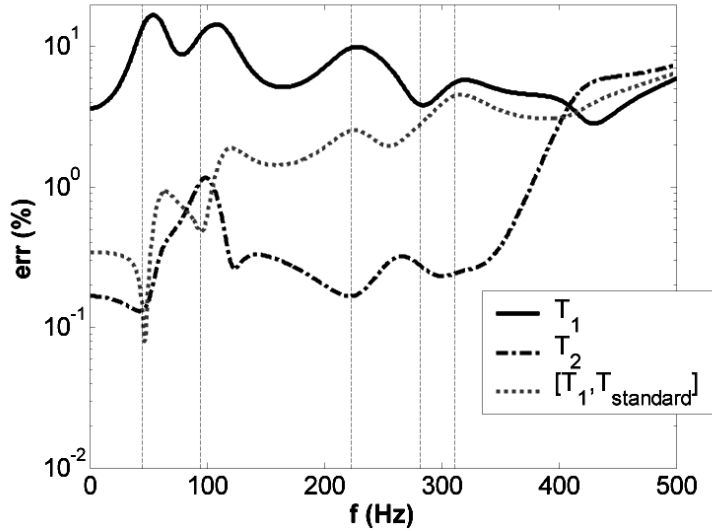


FIG. 2.20 – Erreurs relatives commises sur le calcul d’une réponse fréquentielle pour différentes bases de réduction.

La gain réalisé avec uniquement 4 modes d’enrichissement reconstruits à partir de chargements standard (dont la contribution orthogonale à  $T_1$  est notée  $T_{stand}$ ) est non négligeable (figure 2.20). Aux fréquences où la réduction sur la base  $T_1$  donnait les résidus les plus élevés, entre 10 et 20% sur la bande de fréquences  $[0 - 250]Hz$ , l’enrichissement avec les modes d’enrichissement standard permet d’atteindre un niveau d’erreur inférieur à 2,5% sur la même bande de fréquences. Le gain réalisé est au moins d’un facteur 4. Au-delà de cette bande de fréquences, l’erreur sur le calcul de réponse après réduction sur la base  $T_1$  est inférieur à 5%. Cette diminution de l’erreur est liée au fait que la couche viscoélastique a alors une déformation spatialement plus complexe et l’enrichissement simple proposé devient obsolète.

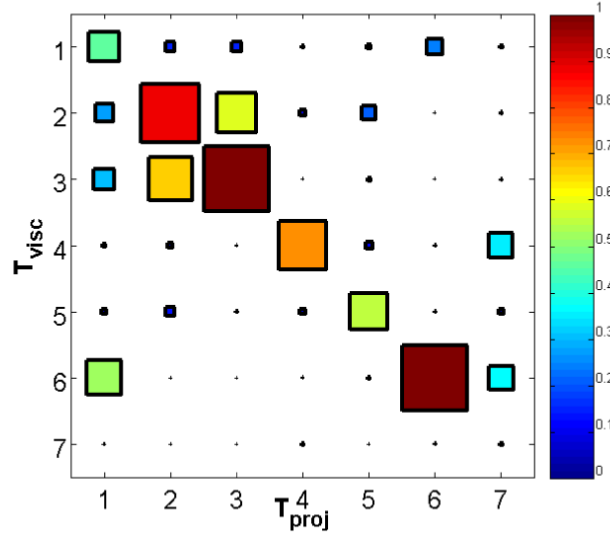


FIG. 2.21 – MAC entre  $\tilde{T}_{visc}$  et la projection  $T_{proj}$  de  $\tilde{T}_{stand}$  sur la base  $\tilde{T}_{visc}$ .

Le MAC entre  $\tilde{T}_{visc}$ <sup>1</sup> et la projection de  $\tilde{T}_{stand}$  sur la base  $\tilde{T}_{visc}$  permet de visualiser la différence entre les sous-espaces représentés par  $\tilde{T}_{visc}$  et  $\tilde{T}_{stand}$ . On remarque que les modes d'enrichissement proposés ne sont pas en mesure de représenter l'information contenue dans les vecteurs  $\tilde{T}_{visc_1}$ ,  $\tilde{T}_{visc_5}$  et  $\tilde{T}_{visc_7}$ . En revanche les quatre autres vecteurs constituant  $\tilde{T}_{visc}$  sont représentés par  $\tilde{T}_{stand}$ .

## 2.2.4 Conclusion sur l'enrichissement

L'enrichissement de bases de réduction est une étape primordiale pour la synthèse modale. Dans des domaines tels que la sous-structuration, on imagine que disposer de bases adéquates pour représenter le comportement des sous-structures est indispensable. Cette section a mis en lumière le processus d'enrichissement proposé qui permet de prendre en compte les modes de correction statique associés aux efforts viscoélastiques. Le fait de considérer la partie liée à l'amortissement du système comme étant une contribution extérieure au système conservatif associé permet en effet de proposer un enrichissement naturel de la base classique composée des vecteurs propres et des modes de corrections statiques associés aux efforts d'entrée.

On a vu que le gain réalisé grâce à la prise en compte des efforts viscoélastiques dans la base de réduction est principalement dû à la description du cisaillement de la couche viscoélastique. Ce résultat concorde avec le fait que le cisaillement est le principal mode de dissipation.

<sup>1</sup>: signifie que l'on ne considère que la partition des ddl de translations sur  $x$  et sur  $y$ .



# Chapitre 3

## Utilisation de méthodes classiques de conception pour un dispositif amortissant original

Le chapitre 3 dresse un bilan des méthodes classiques de conception appliquées au contexte industriel d'EDF. Dans un premier temps, le contexte industriel est défini à la section 3.1. Un cas possible d'application y est présenté. La section 3.2 présente alors le démonstrateur utilisé et l'objectif fixé pour les développements de la thèse. À partir de ce démonstrateur, un dispositif amortissant original intégrant des matériaux viscoélastiques est étudié en section 3.3. La section 3.4 propose enfin la comparaison calcul/essai de la structure modifiée et la conclusion sur l'emploi d'un modèle numérique non recalé pour la conception de modifications structurales.

### 3.1 Le problème industriel

#### 3.1.1 Contexte

Les problèmes vibratoires rencontrés classiquement sur le parc d'EDF sont de deux types. Le premier regroupe les excitations harmoniques souvent associées aux fréquences de rotation des machines tournantes (moteurs ou pompes). Le second type regroupe les excitations large bande dues par exemple à des interactions fluide-structure, des écoulements turbulents, etc.

Le traitement des excitations harmoniques par des modifications en masse ou en raideur est efficace dans la plupart des cas. L'ajout de masses localisées permet de décaler vers le bas les fréquences propres de la structure et d'écarter le pic de résonance incriminé dans le problème vibratoire. L'ajout de raidisseurs a l'effet inverse : on observe une augmentation des fréquences propres. L'éloignement d'un pic de résonance d'une raie excitatrice permet alors de diminuer le niveau vibratoire.

Les cas de densité spectrale importante peuvent cependant être problématiques



pour ce genre de modifications. Dans ces cas, le décalage des fréquences propres peut être une solution difficile à maîtriser ; le décalage peut provoquer l'excitation d'un mode voisin qui aurait subi l'effet de la modification. Le risque de décaler en fréquence un mode capable de s'apparier avec les efforts d'excitation existe alors.

L'ajout d'éléments amortissants est une alternative de modification intéressante pour plusieurs raisons. L'intérêt de ce genre de modification n'est pas le décalage fréquentiel mais la diminution globale du niveau vibratoire par amortissement. Ce type de modifications est donc particulièrement adapté pour les problèmes avec excitation large bande. En effet le décalage de fréquence obtenu par les modifications en masse ou en raideur n'est généralement pas suffisant pour éloigner les résonances de la bande excitée.

Dans le cas de forte densité modale, et d'excitations harmoniques, les modifications dissipatives apportent à nouveau une perspective de traitement intéressante.

Un dernier point est le caractère relativement peu intrusif des modifications dissipatives. Dans la majorité des cas, l'ajout de raidisseurs nécessite en effet une liaison continue de taille relativement importante entre les sous-structures et, est largement intrusif. Nous verrons que des solutions d'amortissement discrètes sont envisageables et autorisent ainsi une plus grande liberté d'intégration.

Il existe également des problèmes vibratoires industriels dont l'origine est une excitation harmonique, mais pour lesquels les modifications en masse ou en raideur n'ont pas apporté de solutions stables dans le temps. L'amortissement est une nouvelle perspective de traitement vibratoire pour ce type de problèmes. Ce cas d'application envisagé dans un futur proche est détaillé sur un exemple en section 3.1.2.

### 3.1.2 Un exemple d'application possible

Le contrôle du vieillissement de certaines structures est indispensable tant pour des raisons économiques, que pour des raisons de sécurité. Les alternateurs (figure 3.1) des groupes turbo-alternateurs (GTA) en sont un bon exemple. Il s'agit d'éléments sensibles de la chaîne de production électrique, derniers maillons de la transformation de l'énergie disponible (nucléaire, thermique, hydraulique...) en énergie électrique.

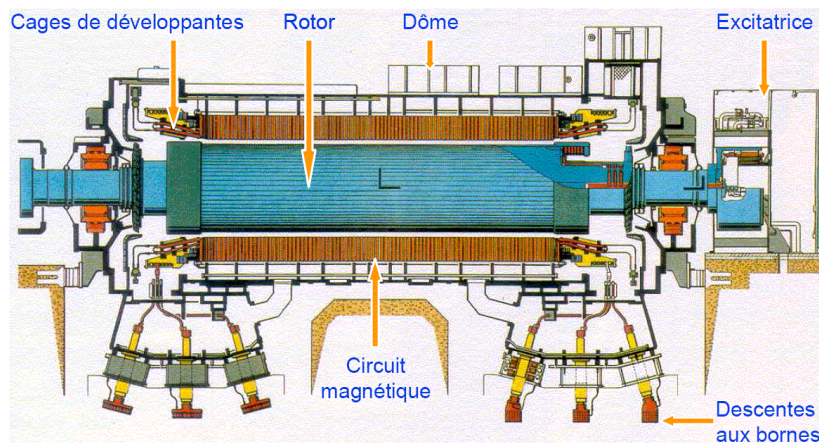


FIG. 3.1 – Schéma d'alternateur.

Ces structures sont le siège de vibrations élevées en fonctionnement, vibrations qui proviennent principalement de l'appariement des forces électromagnétiques induites entre le rotor et le stator. On observe une harmonique prépondérante autour de la fréquence de rotation. Les extrémités du stator, appelées cages de développantes ou têtes de bobines, sont des parties particulièrement critiques pour lesquelles on déplore des avaries directement liées aux vibrations induites par cette excitation.

L'évolution mécanique de la structure, une perte de raideur des matériaux isolants, a pour effet de rapprocher de la raie d'excitation des fréquences de résonance de certains modes propres excitables. Ce phénomène se traduit par une augmentation lente des niveaux vibratoires sur les têtes de bobines.

Les solutions tentées jusqu'à présent afin de limiter ce problème ont consisté à désaccorder les modes propres incriminés en cherchant à éloigner les fréquences propres de ces derniers :

- soit en rigidifiant la structure, par la remise en tension des calages : cela a pour effet d'augmenter la fréquence des modes propres,
- soit au contraire en ajoutant de la masse, ce qui a pour effet de diminuer la fréquences des modes propres.

Dans certains cas, la mise en œuvre de ces solutions n'a pas donné entière satisfaction : une dérive lente en fréquence du comportement est observée et le problème vibratoire réapparaît rapidement après l'installation des modifications.

C'est pourquoi, dans le cadre d'un projet de recherche d'EDF (le projet VITAL), il a été décidé d'étudier un autre type de solution de réduction des vibrations à l'aide de modifications dissipatives [30].

Les modes incriminés dans ces problèmes vibratoires sont des modes d'ovalisation à 3 lobes du stator. La figure 3.2 montre les modes à 2 et 3 lobes mesurés et superposés

avec ceux provenant d'un modèle numérique de la structure.

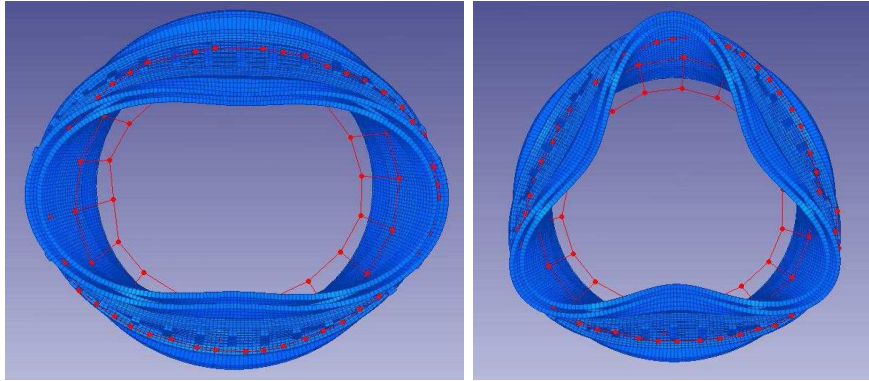


FIG. 3.2 – Modes d'ovalisation à 2 et 3 lobes d'un alternateur.

La modélisation de la structure pose de nombreux problèmes. EDF est un exploitant et ne dispose généralement pas des modèles numériques des structures exploitées. De plus la modélisation est délicate du fait de la taille, de l'hétérogénéité ou du nombre de liaisons de la structure. En outre, chaque structure a un comportement différent, car le montage est relativement artisanal, et a également une évolution de comportement différente. Le recalage de ce genre de structures n'est donc pas envisageable et la conception de modifications correctrices du comportement à l'aide des méthodes classiques de conception est donc rendue difficile.

## 3.2 Le démonstrateur

Le démonstrateur, support des développements de la thèse, est introduit en section 3.2.1. Une analyse modale de la structure est ensuite présentée en section 3.2.2 puis une modélisation est proposée en section 3.2.3.

### 3.2.1 Justifications du choix du démonstrateur

Le département AMA (Analyses Mécaniques et Acoustiques) d'EDF R&D dispose d'un certain nombre de démonstrateurs permettant de reproduire le comportement de structures d'exploitation. Le démonstrateur de la figure 3.3 présente des modes d'ovalisation typiques des alternateurs présentés en section 3.1.



FIG. 3.3 – Photo du démonstrateur initial.

Il est évident que le comportement dynamique du démonstrateur constitué de tôle d'acier homogène est nettement plus aisé à idéaliser que celui d'une vraie cage de développantes d'alternateur, à la géométrie complexe, assemblage de matériaux et de structures hétérogènes et au comportement non isotrope et non linéaire.

Cependant la complexité du démonstrateur a été jugée suffisante pour constituer un bon cas test de validations du principe de la mise en œuvre de dispositifs amortissants pour réduire les vibrations des structures d'EDF.

En conséquence ce démonstrateur sera celui qui servira de support à l'évaluation des méthodes de prédiction de l'ajout de modification dissipative présentées dans cette thèse.

### 3.2.2 Analyse modale expérimentale de la structure initiale

Le démonstrateur choisi est un cylindre creux soudé sur une plaque circulaire elle-même vissée en quatre points sur une plaque carrée. Les dimensions sont répertoriées dans le tableau 3.1. Le tout est réalisé en acier.

	Désignation	Dimension (mm)
cylindre	hauteur	800
	diamètre	600
	épaisseur	5
plaque circulaire	diamètre	920
	épaisseur	5
plaque carrée	largeur	1200
	épaisseur	5
appendices du cylindre	hauteur	15
	épaisseur	4
	côté	10

TAB. 3.1 – Dimensions du démonstrateur

Le maillage capteur correspondant aux mesures effectuées est montré sur la figure 3.4. Pour des raisons de visibilité, le maillage numérique est affiché également. La couronne supérieure est instrumentée par 12 capteurs tri-axiaux. Les couronnes inférieures sont des couronnes de 6 capteurs tri-axiaux chacune. Les mesures sur la plaque sont des mesures verticales. Cette configuration capteurs est assez dense pour permettre l'identification des premiers modes de la structure jusqu'à environ  $200Hz$ . La couronne supérieure de 12 capteurs permet l'identification des modes d'ovalisation à 4 lobes dont les fréquences propres sont situées autour de  $200Hz$ .

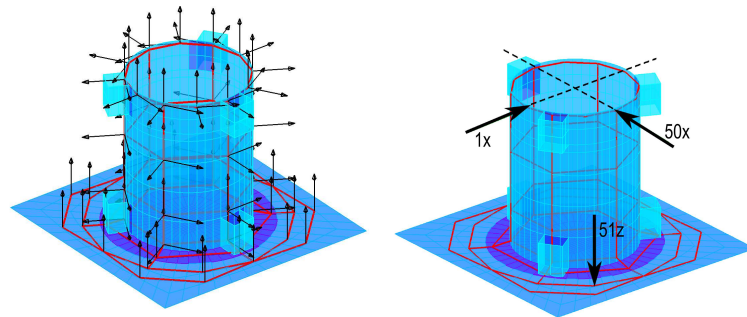


FIG. 3.4 – Maillage capteur (filare rouge) superposé sur le maillage numérique (bleu) avec les trois points d'excitation.

Les transferts de la figure 3.5 illustrent la réciprocité de la structure.

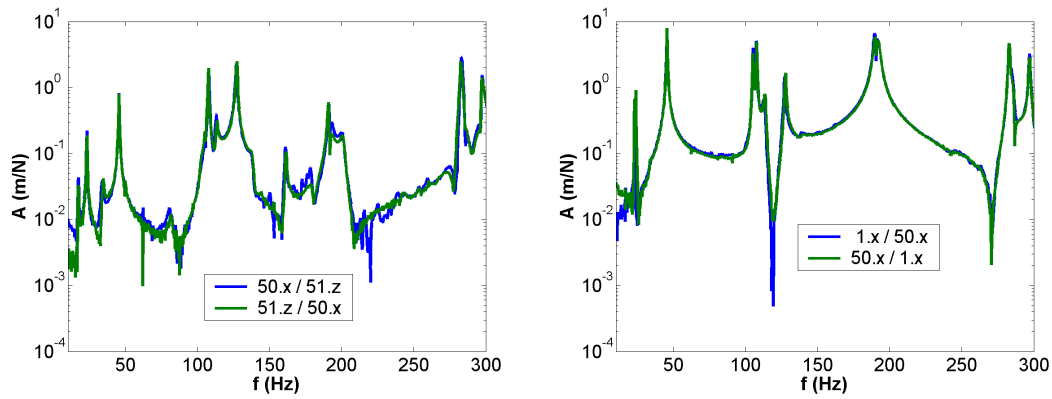


FIG. 3.5 – FRF expérimentales. Mesures colocalisées. Illustrations de la réciprocité.

Les modes identifiés sont les modes de pompage, de bascule (mode double), d'ovalisation à 2 lobes, à 3 lobes (fig. 3.6) et à 4 lobes, ainsi que des modes de la plaque. Le tableau 3.2 donne les désignations, les fréquences propres et les amortissements modaux des modes identifiés de la structure.

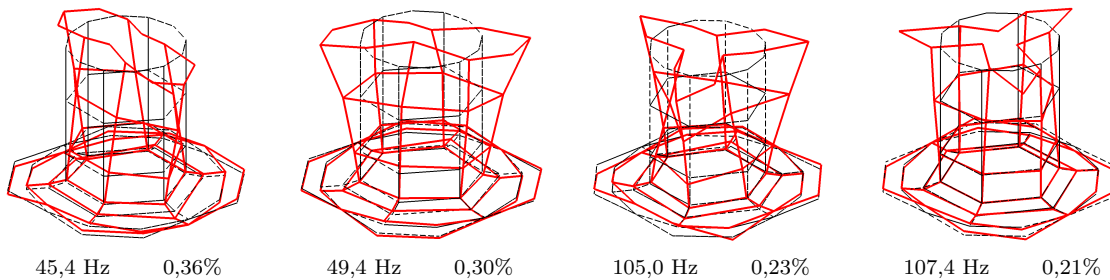


FIG. 3.6 – Quelques modes identifiés de la structure initiale.

Désignation des modes	$f$ (Hz)	$\xi$ (%)
Pompage	17,1	0,67
Bascules	23,2	0,70
	23,2	0,70
Ovalisation 2 lobes (1) (sur les axes principaux)	45,4	0,34
Ovalisation 2 lobes (2) (sur les diagonales)	49,7	0,29
Modes de plaque	81,8	1,26
Ovalisation 3 lobes	105,0	0,23
	107,5	0,27
	112,7	0,58
Modes de plaque	126,9	0,34
	137,7	0,85
	179,1	0,60
Ovalisation 4 lobes	189,6	0,47
	192,3	0,52
Modes de plaque	200,7	0,77

TAB. 3.2 – Désignation des premiers modes, fréquences propres  $f$  et coefficients d'amortissement modal  $\xi$  identifiés.

On observe quelques perturbations des mesures autour de 30 et 70 Hz. Cependant la prise en compte de ces perturbations comme pôle dans l'identification ne donne pas de résultats cohérents et ont donc été écartées. Il semble s'agir de modes des vis, liens entre la plaque carrée et la plaque circulaire ; leur identification n'est pas évidente et le modèle numérique ne permet pas de confirmer clairement cette analyse. De plus la dispersion de ces perturbations sur une gamme de fréquence et la mauvaise qualité des pics de résonance incitent à ne pas les prendre en compte.

### 3.2.3 Description numérique

Le modèle numérique de la structure est schématisé sur la figure 3.7.

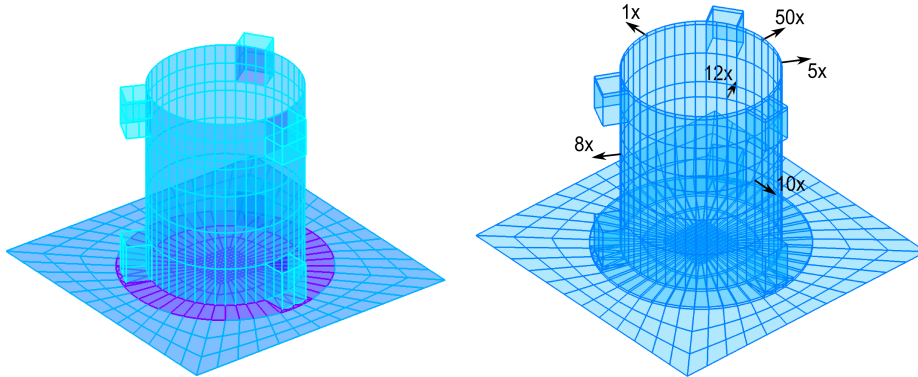


FIG. 3.7 – Définition du cas test et des entrées/sorties des transferts affichés.

Le maillage est constitué d'éléments coque linéaire à trois et quatre noeuds. Les caractéristiques modales du modèle numérique permettent de mettre en place une pré-étude numérique du traitement amortissant.

La structure présente des modes caractéristiques de certaines applications d'EDF. Les modes de pompage et de bascule sont généralement des modes typiques des pompes et autres moteurs. Les modes d'ovalisation se rencontrent sur des structures circulaires, par exemple des cages d'alternateurs. Les caractéristiques modales du démonstrateur dans la gamme de fréquences à laquelle on s'intéresse par la suite sont données dans le tableau 3.3.



Désignation des modes	Fréquences propres (Hz)
Pompage	15,7
Bascules	21,8
	22,5
Ovalisation 2 lobes (1) (sur les axes principaux)	43,5
Ovalisation 2 lobes (2) (sur les diagonales)	48,2
Modes de plaque	73,3
	92,6
	100,9
Ovalisation 3 lobes	104,5
	111,9
	138,0
Modes de plaque	139,1
	160,1
	169,9
	183,1
Ovalisation 4 lobes	199,1
	199,5

TAB. 3.3 – Désignation des premiers modes et fréquences propres calculés numériquement

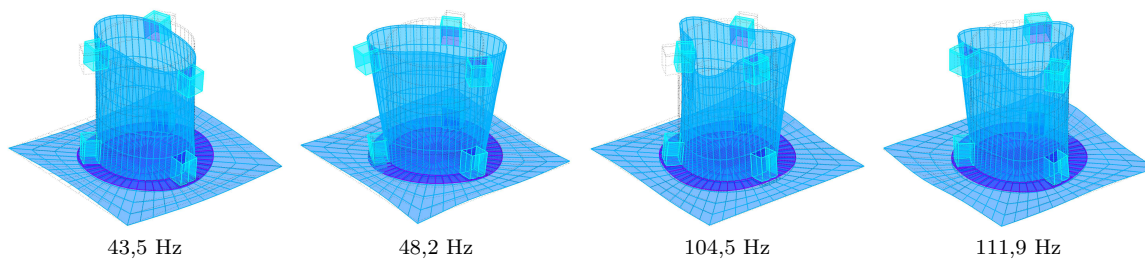


FIG. 3.8 – Modes du démonstrateur.

La figure 3.9 montre un transfert de la structure. Dans la suite, on cherche à diminuer le niveau vibratoire de la structure sur la gamme de fréquence  $[30 - 150]Hz$ , ce qui correspond à traiter les modes d'ovalisation à 2 et 3 lobes.

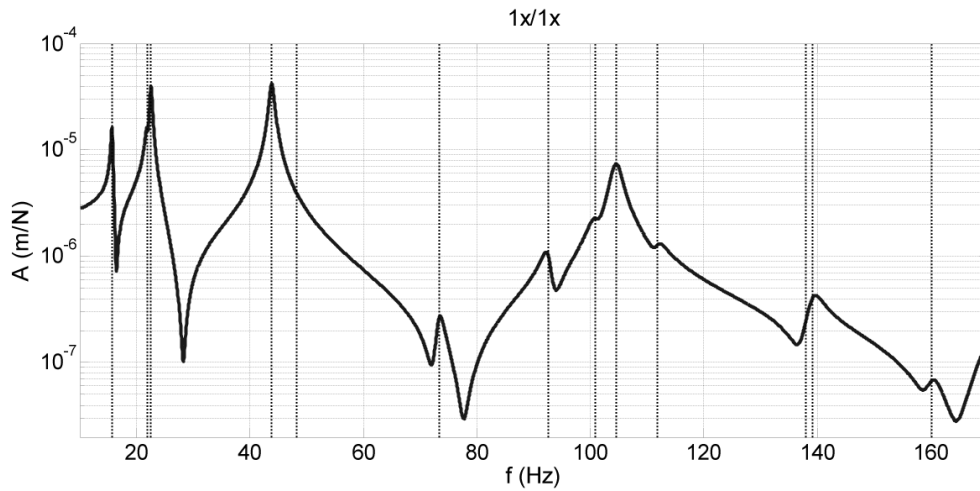


FIG. 3.9 – Transfert du démonstrateur numérique.

Quelques paramètres du modèle numérique présenté ici ont été ajustés en s'appuyant sur les résultats de l'analyse modale. L'ajustement de ces paramètres n'est pas décrit dans la thèse car il ne s'agit que d'un recalage grossier du comportement de la structure. Les paramètres principaux qui ont été ajustés sont les paramètres de liaison entre la plaque carrée et la plaque circulaire. C'est une liaison difficile à modéliser et le comportement du modèle est très sensible à la modélisation de cette liaison réalisée à l'aide de 4 vis (3 alentours et 1 au centre). La solution de modélisation retenue est un réseau de liens rigides autour des points de liaison. Cette modélisation n'est sans doute pas la plus réaliste mais permet de retrouver des déformées d'ovalisation de bonne qualité.

Le modèle numérique fournit des déformées relativement similaires à celles identifiées. Ci-dessous, on peut voir que le MAC entre les déformées calculées à partir du modèle numérique restreintes sur les points de mesure et les déformées mesurées fournit de très bons résultats sur les 7 premiers modes. Au-delà, l'identification commence à échouer du fait du manque de capteurs sur la plaque.

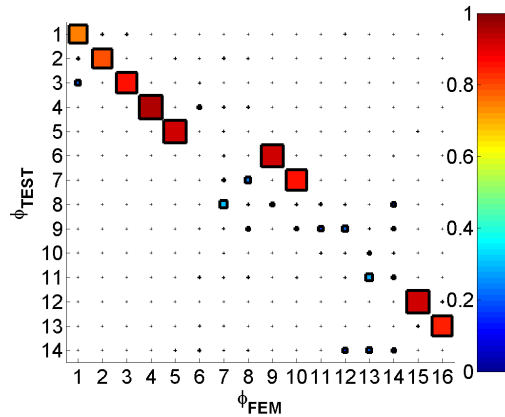


FIG. 3.10 – MAC sur les points de mesure entre déformées calculées et déformées identifiées.

La figure 3.11 compare les transferts mesurés, synthétisés avec les modes identifiés jusqu'à  $200\text{Hz}$ , et calculé à partir du modèle numérique. Elle illustre les difficultés de modélisation d'une telle structure. Même si les formes des modes de pompage, bascule et ovalisation sont bien modélisées, on remarque que les transferts calculés sont relativement éloignés des transferts mesurés. Le recalage d'une telle structure nécessiterait un nombre de mesures important qu'il n'est pas envisageable de pratiquer d'un point de vue industriel.

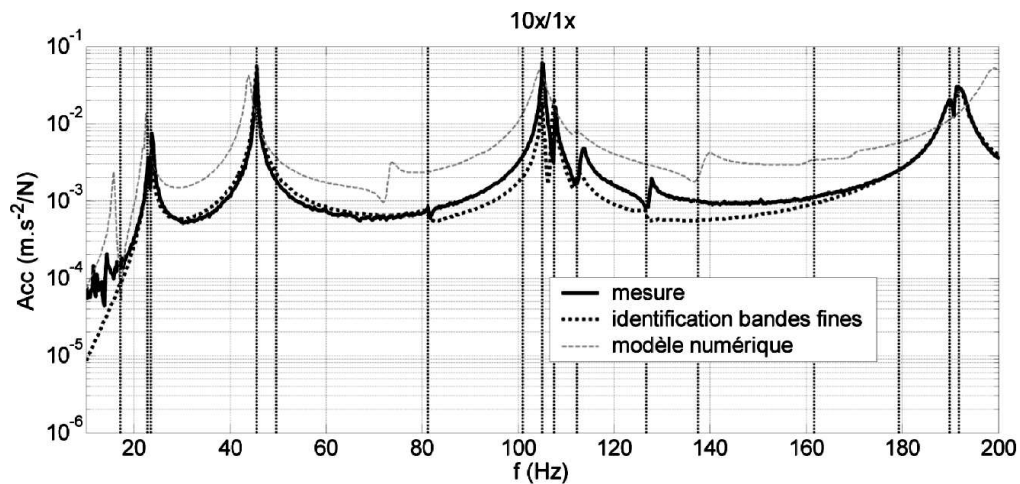


FIG. 3.11 – Transferts mesurés, synthétisés avec les modes identifiés jusqu'à  $200\text{Hz}$  et calculés à partir du modèle numérique.

L'objectif est la diminution du niveau vibratoire sur le cylindre sur la bande de fréquence de 30 à 150Hz, ce qui correspond à amortir les modes d'ovalisation à 2 et 3 lobes.

La modélisation d'une structure complexe n'est pas aisée. Pour obtenir un comportement représentatif sur une large bande de fréquences, il est nécessaire de disposer d'un nombre important de mesures et d'outils de recalage. Les techniques de recalage sont nombreuses mais ne sont pas l'objet de la thèse. Les références [45], [80] ou [26] passent en revue les différentes techniques de recalage. Le recalage est une phase longue et coûteuse d'une modélisation et ne correspond pas aux besoins d'EDF dont le parc industriel est composé de structures très complexes avec des variations de comportement importantes pour le même type de structures. Il s'agit souvent de structures qui évoluent dans des conditions d'exploitation différentes. La qualité de modélisation atteinte (figure 3.11 par exemple) dans notre cas d'étude est typique des modélisations de reprise de conception. On propose par la suite l'utilisation de ce modèle pour évaluer l'effet d'une modification amortissante.

### 3.3 Description de la modification

La conception d'une modification est soumise à un certain nombre de conditions, d'encombrement par exemple, ou de maintenance... L'objectif de cette section est de proposer un concept original de traitement amortissant de modes d'ovalisation d'une structure de même type que le démonstrateur décrit en section 3.2.

On choisit une modification réalisée à partir de tirants amortis (section 1.2) pour deux raisons principales.

Les tirants amortis utilisés dans le bâtiment ou l'aéronautique décrits à la section 1.2 donnent une certaine liberté de conception. Les paramètres de conception, le module de cisaillement  $G$  du matériau viscoélastique, la surface  $S$  du matériau et son épaisseur  $\tau$ , autorisent un grand domaine d'ajustements pour un encombrement minimal.

De plus, l'utilisation de modifications discrètes permet d'avoir un critère de conception simple. L'amortissement est directement lié à l'importance du cisaillement de la couche viscoélastique, c'est-à-dire au différentiel de déplacement entre les deux extrémités du tirant. Ainsi, sur une structure vibrante, l'installation d'un tirant entre un point fixe et un ventre de vibration permet d'obtenir le meilleur différentiel pour un mode donné et donc le meilleur amortissement.

Un autre avantage des modifications discrètes est le caractère faiblement intrusif de la modification sur la structure initiale. L'installation de tirants amortis à un impact sur un nombre discret de points de la structure alors que l'installation d'un raidisseur nécessite des filets de soudure ou de nombreux points d'ancrage pour s'approcher de liaisons continues.

Dans cette section, on propose, dans un premier temps (section 3.3.1), un concept de dispositif amortissant autosupporté utilisant des tirants. À la section 3.3.1, les effets des paramètres de conception du dispositif sont étudiés. La section 3.3.4 présente les effets de la modification dissipative définitive.

### 3.3.1 Concept original de dispositif amortissant

L'installation d'un tirant ou d'un réseau de tirants entre des points fixes et les ventres d'un mode ou entre les ventres eux-mêmes permet l'amortissement de celui-ci.

Pour un mode d'ovalisation à 2 lobes d'une structure cylindrique, un tirant reliant deux points diamétralement opposés permet d'amortir ce mode (fig. 3.12). En revanche il n'aura que très peu d'impact sur le mode d'ovalisation orthogonal. Pour l'amortissement de ce deuxième mode, un autre tirant décalé de  $45^\circ$  devra être installé.

Le même raisonnement est applicable pour les modes d'ovalisation d'ordre supérieur. Ainsi pour amortir un mode d'ovalisation à 3 lobes, un réseau de 3 tirants sera nécessaire. Le mode à 3 lobes orthogonal ne sera en revanche pas impacté sinon par un dispositif similaire décalé de  $30^\circ$ .

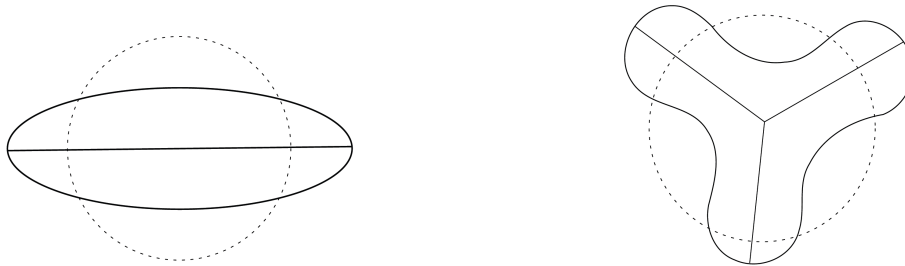


FIG. 3.12 – Principe de conception pour l'amortissement de modes d'ovalisation

Ce principe de conception doit cependant être adapté à l'environnement de la structure à modifier. Plusieurs conditions sont en général imposées :

- les modifications ne peuvent être placées que sur les surfaces externes à la structure.
- des appendices empêchent en général la régularité angulaire de pose de tirants.
- l'existence d'un point fixe (appartenant au bâti) disponible pour encastrier une modification est très hypothétique.

Toutes ces conditions rendent évidemment la conception moins systématique.

Dans le cas où l'encastrement des tirants fixés à l'extérieur de la structure est possible, seule la répartition angulaire des tirants peut être problématique. Dans cette configuration, chaque tirant joue un rôle quasiment indépendant.

En revanche dans le cas où l'encastrement est impossible (structure isolée, bâti trop faible...), on va exploiter les différentiels de déplacement. Sur le même principe du

tirant fixé entre deux points diamétralement opposés pour amortir le mode d'ovalisation à deux lobes, ici on propose d'utiliser une couronne suffisamment rigide et de faire travailler en opposition deux tirants liés à ces deux points et sur la couronne (Fig. 3.13).

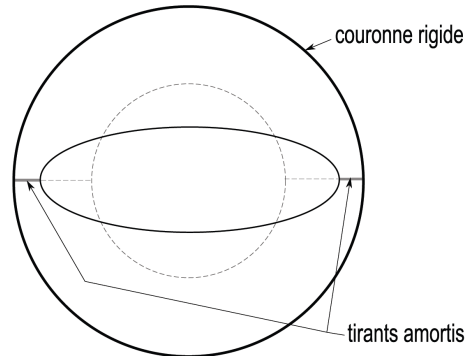


FIG. 3.13 – Utilisation d'une couronne rigide comme support de travail des tirants amortis

L'utilisation d'une telle couronne impose néanmoins d'assurer sa stabilité et son équilibre à l'aide des tirants eux-mêmes. Ainsi la symétrie de la répartition des tirants doit être largement respectée afin d'assurer son équilibre et les tirants doivent être en nombre suffisant pour la stabilité et la tenue statique de l'ensemble.

Le support de la couronne impose également l'orientation des tirants de manière à équilibrer le chargement, ici, la pesanteur.

Dans cette section, on considère le modèle éléments finis du démonstrateur défini en 3.2. On considère une modification amortissante (figure 3.14) modélisée, ici, par une couronne rigide reliée et supportée par des éléments *bar* de raideur complexe  $K = k(1 + i\eta)$ . Ces derniers modélisent les tirants amortis rotulés à leurs extrémités, ce qui correspond à la réalisation détaillée à la section 1.2.2.

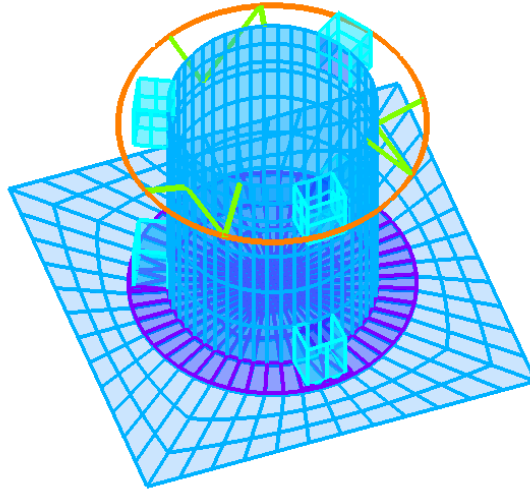


FIG. 3.14 – Démonstrateur avec une modification modélisée par une couronne rigide reliée et supportée par des éléments *bar*.

L'adaptation de la modification au démonstrateur impose, comme on vient de le dire, certains choix de conception. Les trois appendices soudés sur le haut du cylindre imposent en effet une répartition régulière de trois ensembles de tirants. Afin d'assurer la stabilité de la couronne rigide, les trois ensembles sont identiques. Ils sont composés de deux tirants orientés dans le plan vertical orthogonal à la surface du cylindre. Ils sont orientés à  $\pm 45^\circ$ , l'un à  $+45^\circ$ , l'autre à  $-45^\circ$ , pour répartir l'effet de la pesanteur. Un troisième tirant est ajouté dans le plan horizontal pour éviter les pseudo-modes de corps rigide de la couronne.

### 3.3.2 Effet de la position des tirants

Cette section présente l'étude de l'influence de la répartition angulaire des tirants. Deux configurations sont étudiées. La première est une configuration à 6 tirants. La figure 3.15 est une schématisation du cas test. La deuxième est une configuration à 9 tirants, schématisée en figure 3.18, assurant une plus grande stabilité de l'ensemble. La répartition angulaire est repérée dans les deux cas par un angle  $\theta$  introduit dans chaque sous-section.

#### 3.3.2.1 Configuration à 6 tirants

Dans un premier temps, on ne considère que 6 tirants : 3 horizontaux pour amortir les modes de corps rigides de la couronne, et 3 dans des plans verticaux normaux à la surface du cylindre. La figure 3.15 schématise la configuration proposée.

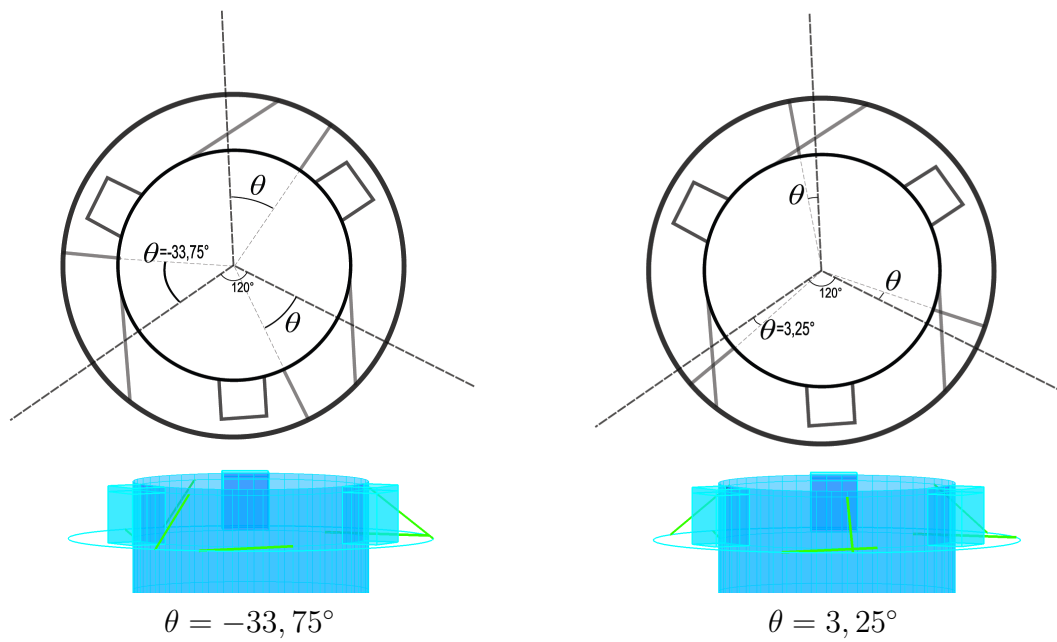


FIG. 3.15 – Démonstrateur vu de dessus. Position des tirants repérée par l'angle  $\theta$ .

Les trois tirants dans les plans verticaux sont orientés à  $+45^\circ$  par rapport à l'horizontale de manière à supporter le poids de la couronne (composante verticale) tout en travaillant sur l'amortissement des modes d'ovalisation (composante horizontale). Les tirants sont donc précontraints en traction.

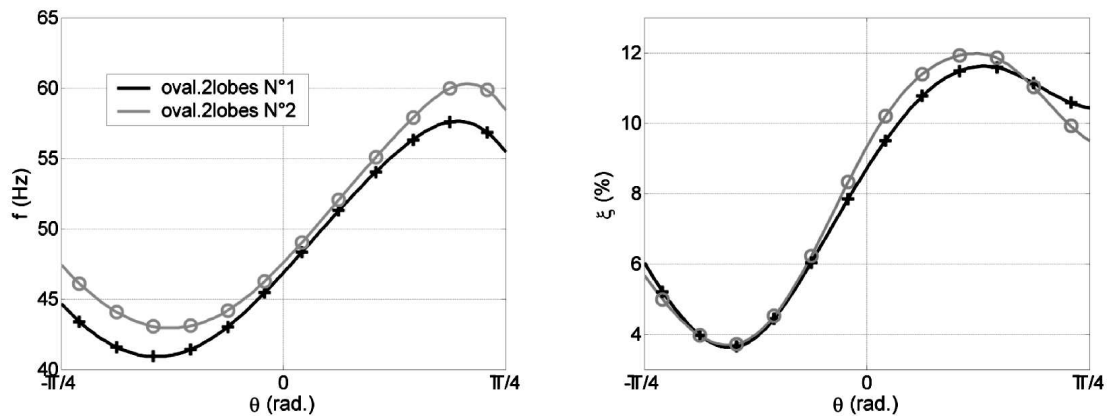


FIG. 3.16 – Évolution des caractéristiques modales selon différentes configurations pour des modes d'ovalisation à 2 lobes ;



On observe une évolution cyclique de la fréquence propre et de l'amortissement des modes d'ovalisation à 2 lobes en fonction de la position des tirants amortis (figure 3.16). Les courbes d'évolution de chacun des deux modes d'ovalisation à 2 lobes sont en phase.

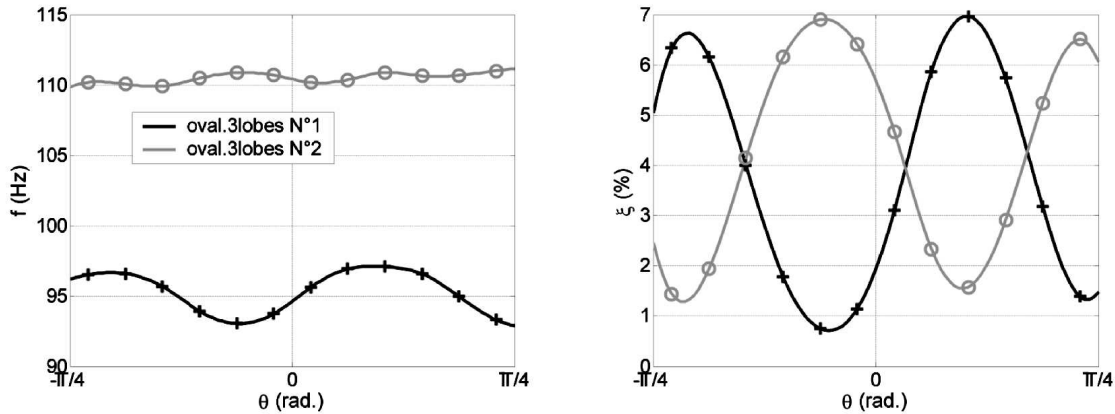


FIG. 3.17 – Évolution des caractéristiques modales selon différentes configurations pour des modes d'ovalisation à 3 lobes ;

La fréquence propre et l'amortissement des modes d'ovalisation à 3 lobes sont également des fonctions sinusoidales de la position des tirants amortis. La période des sinusoides est en revanche plus faible pour les ovalisations à 3 lobes ( $T \approx \pi/3$ ) que pour les ovalisations à 2 lobes ( $T \approx \pi/2$ ), ce qui est cohérent avec l'intuition que l'on peut avoir sur l'effet de la répartition des tirants. On note cependant que les courbes d'évolution de l'amortissement des modes d'ovalisation à 3 lobes sont en opposition de phase. Cette caractéristique est à nouveau en cohérence avec ce que l'on avait annoncé. Lorsqu'un mode est amorti au maximum, les tirants des plans verticaux répartis régulièrement à  $120^\circ$  agissent sur chacun des lobes d'un mode d'ovalisation à trois lobes. L'impact des tirants sur le mode orthogonal est donc moindre puisque les lobes sont alors décalés de  $60^\circ$  par rapport à la position des tirants.

L'amortissement est optimal pour certaines positions selon le mode observé. La position  $\theta = 0$  est un choix judicieux puisqu'on atteint environ 8% d'amortissement pour les modes à 2 lobes et 4% pour les modes à 3 lobes.

### 3.3.2.2 Configuration à 9 tirants

Dans un souci d'améliorer la stabilité de l'ensemble, la configuration finale à 9 tirants est proposée (figure 3.14).

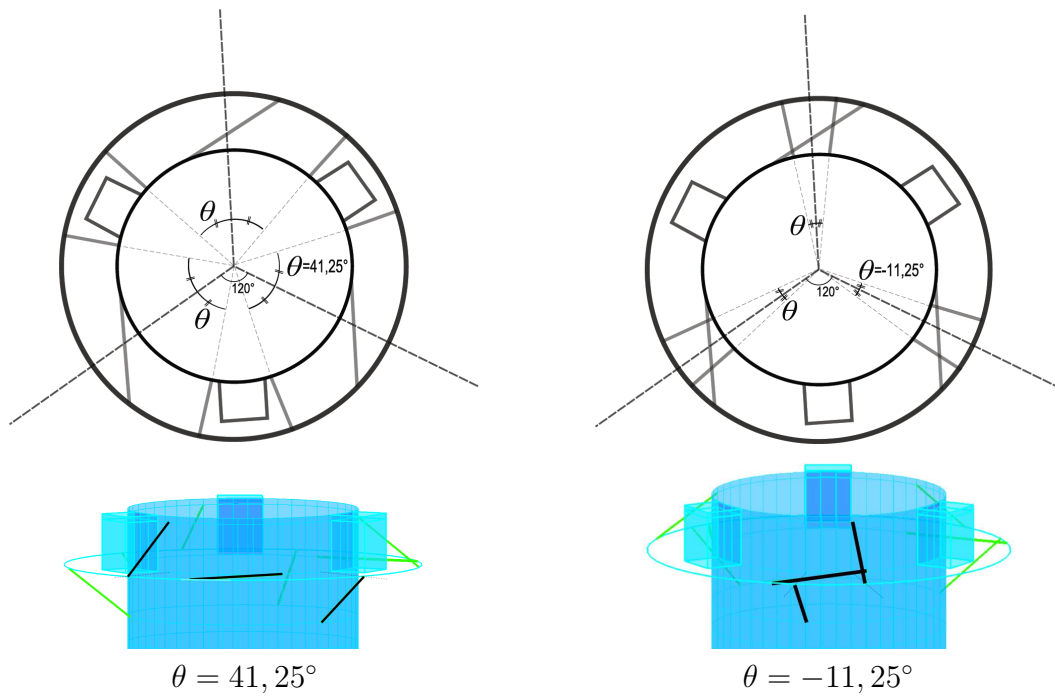


FIG. 3.18 – Démonstrateur vu de dessus. Position des tirants repérée par l'angle  $\theta$ .

La figure 3.18 est une schématisation du nouveau démonstrateur. La répartition angulaire est repérée par l'angle  $\theta$ . Ainsi chaque position testée correspond à un angle  $2\theta$  entre deux tirants de chaque groupe.

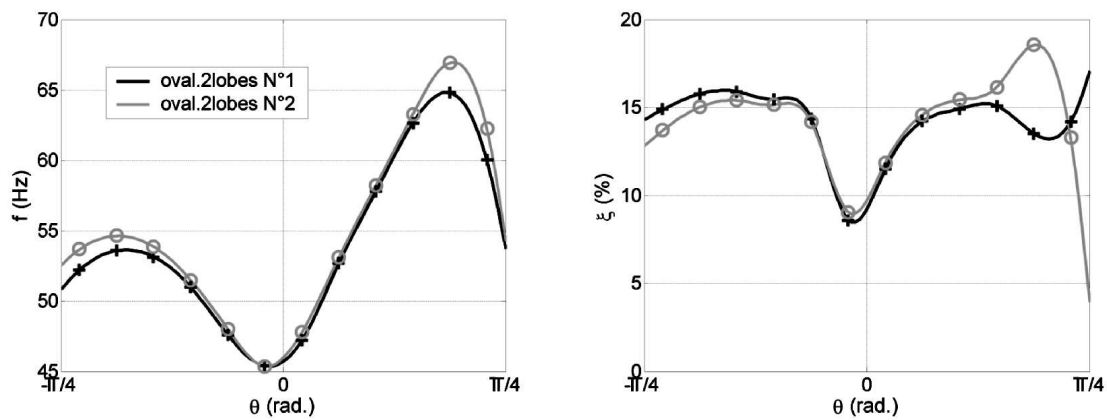


FIG. 3.19 – Évolution des caractéristiques modales selon différentes configurations pour des modes d'ovalisation à 2 lobes ;

La figure 3.19 montre l'évolution de la fréquence propre et de l'amortissement modal des deux modes orthogonaux d'ovalisation à 2 lobes. On voit que la position des tirants, dans cette configuration, a une influence non négligeable sur l'amortissement de ces deux modes. On remarque que lorsque  $\theta$  est proche de 0, i.e. lorsque les tirants sont dans le même plan, l'amortissement de ces modes chute. On se trouve alors dans une configuration où les lobes des deux modes orthogonaux d'ovalisation font largement moins travailler les tirants amortis. L'écart de la valeur de l'amortissement entre deux positions extrêmes atteint environ 50% de la valeur d'amortissement maximal.

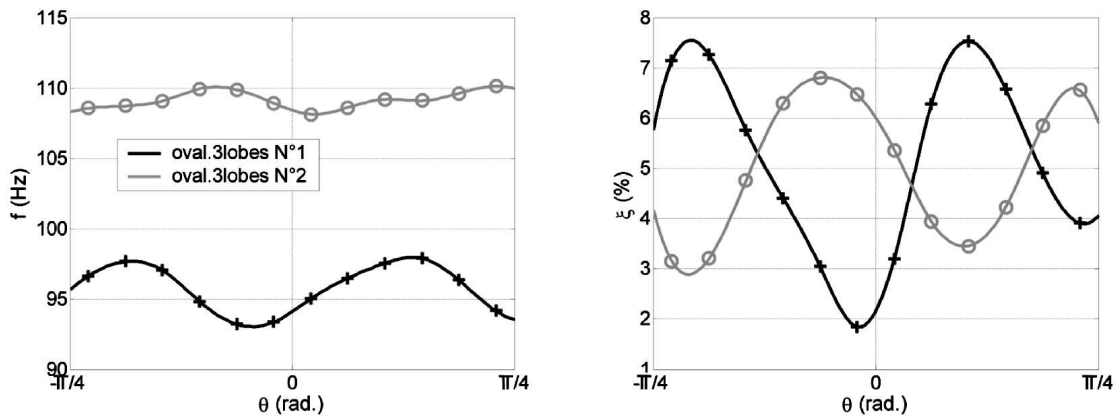


FIG. 3.20 – Évolution des caractéristiques modales selon différentes configurations pour des modes d'ovalisation à 3 lobes ;

Pour les modes d'ovalisation à 3 lobes (figure 3.20), on observe également une évolution de l'amortissement et de la fréquence. Il est intéressant de noter que l'évolution est ici sinusoidale en fonction de la position. La période des courbes est d'environ  $\pi/3$ . Il faut noter également que les amortissements de chacun de ces modes orthogonaux sont déphasés. Ainsi le maximum d'amortissement d'un des modes est atteint lorsque l'amortissement de l'autre est au minimum. L'écart maximum entre deux valeurs locales extrêmes atteint 5% pour un maximum autour de 7%. Pour l'amortissement des modes d'ovalisation à 3 lobes, on préférera donc une position de tirants permettant d'avoir un amortissement équivalent pour chacun des deux modes.

Dans cette configuration à 9 tirants, les positions optimales des tirants ( $\theta \approx -\frac{\pi}{3}$  ou  $\theta \approx \frac{\pi}{3}$ ) permettent d'atteindre environ 15% d'amortissement pour les modes à 2 lobes et 5% pour les modes à 3 lobes.

### 3.3.2.3 Répartition de l'énergie de déformation dans les différents tirants

L'amortissement des différents modes d'ovalisation est réalisé par plusieurs réseaux de tirants. L'utilisation simultanée de ces différents réseaux crée cependant des interactions et l'étude de la répartition d'énergie de déformation dans les différents tirants permet de vérifier que chacun d'entre eux contribue à l'amortissement.

La figure 3.21(a) donne la fraction d'énergie de déformation présente dans les tirants amortis sur l'énergie totale dissipée pour la configuration à 9 tirants. Les modes à fort amortissement sont ceux où l'énergie de déformation des tirants est la plus importante. Les pseudo-modes de couronne, les modes d'ovalisation à 2 et 3 lobes sont les modes amortis (modes 4 à 11, 15 et 16). Les autres modes correspondent aux modes de pompage, de bascule et de plaque ne font pas ou peu travailler les tirants.

La figure 3.21(b) donne la répartition d'énergie de déformation entre les différents tirants. Elle permet de vérifier que chacun des tirants joue un rôle important dans l'amortissement.

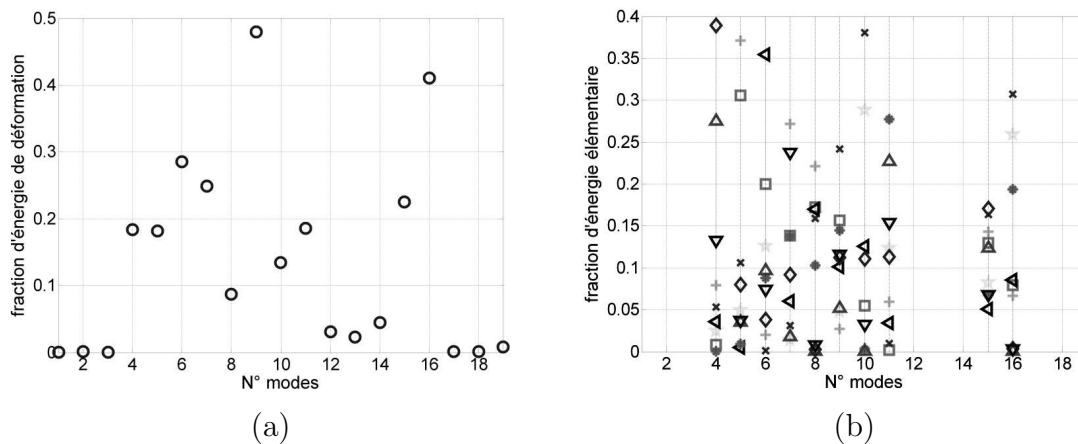


FIG. 3.21 – Répartition d'énergie de déformation. (a) : fraction d'énergie de déformation présente dans les tirants amortis sur l'énergie totale dissipée. (b) : répartition de l'énergie dissipée entre les différents tirants.

La configuration proposée donne des résultats satisfaisants d'amortissement. On vérifie que tous les tirants participent à l'amortissement.

### 3.3.3 Dimensionnement de la modification

Le dimensionnement de la modification dépend de différents paramètres. La section 3.3.3.1 présente le paramètre de raideur des tirants, qui intervient directement sur l'amortissement. Il est possible de déterminer une raideur optimale pour chacun des modes. Le suivi modal est délicat dans des cas très dissipatif et l'examen de transfert

permet plus facilement de déterminer la raideur optimale. La section 3.3.3.2 montre l'effet de la masse de la modification sur l'amortissement et le couplage de certains modes.

Enfin la dissipation énergétique liée au travail de la modification influence particulièrement le comportement de la structure (section 3.3.3.3).

### **3.3.3.1 Effet de la raideur des tirants**

La raideur du tirant joue un rôle prépondérant dans la qualité de l'amortissement. Il existe en effet une valeur optimale de raideur pour laquelle un mode sera amorti au mieux. Cette raideur optimale dépend évidemment du nombre de tirants ainsi que de leur répartition. Le démonstrateur utilisé ici est celui de la figure 3.14. On considère dans un premier temps un comportement de la structure indépendant de la fréquence.

La figure 3.22 présente des transferts du modèle numérique initial, et de la structure modifiée pour différentes raideurs des tirants.

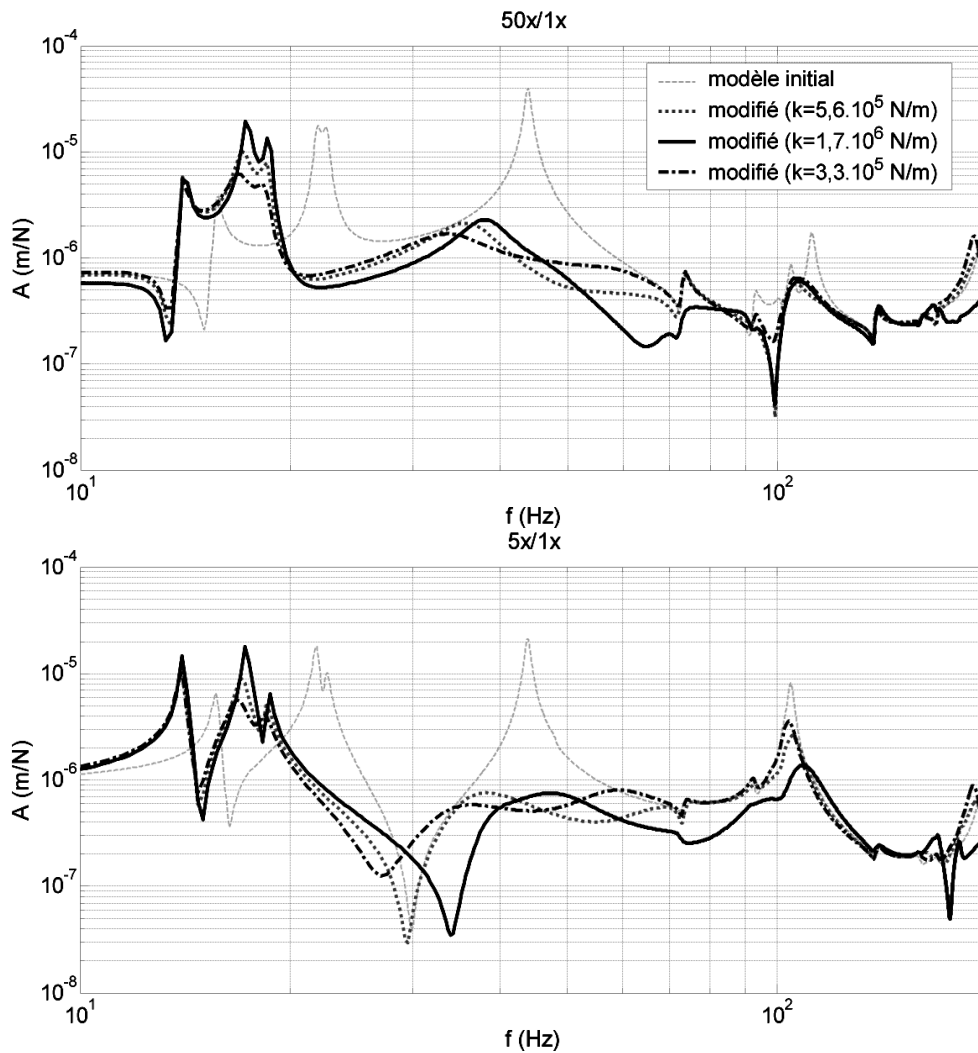


FIG. 3.22 – Transferts avant et après modification pour différentes raideurs des tirants (localisations capteurs données sur la figure 3.7).

Le tracé des transferts permet de réaliser un choix sur la raideur optimale des tirants. Il s'agit en effet d'une solution de choix efficace car le suivi modal en fonction de l'évolution de la raideur des tirants est malaisé à cause du couplage fort entre différents modes.

Les pseudo-modes rigides de la couronne évoluent effectivement en fonction de la raideur des tirants et leur fréquence propre s'en trouve modifiée. Un couplage entre ces modes et les modes voisins en fréquence apparaît donc. Le suivi des modes est ainsi perturbé et les déformées largement transformées. La figure 3.24 représente l'évolution d'une réponse fréquentielle en fonction de la raideur des tirants. Certains modes se

croisent, ce qui provoque une évolution des déformées, un couplage puis un découplage. Sur la figure 3.24, le facteur de perte considéré pour les tirants est artificiellement réduit de manière à ne considérer qu'un amortissement structural afin de mettre en évidence les croisements modaux.

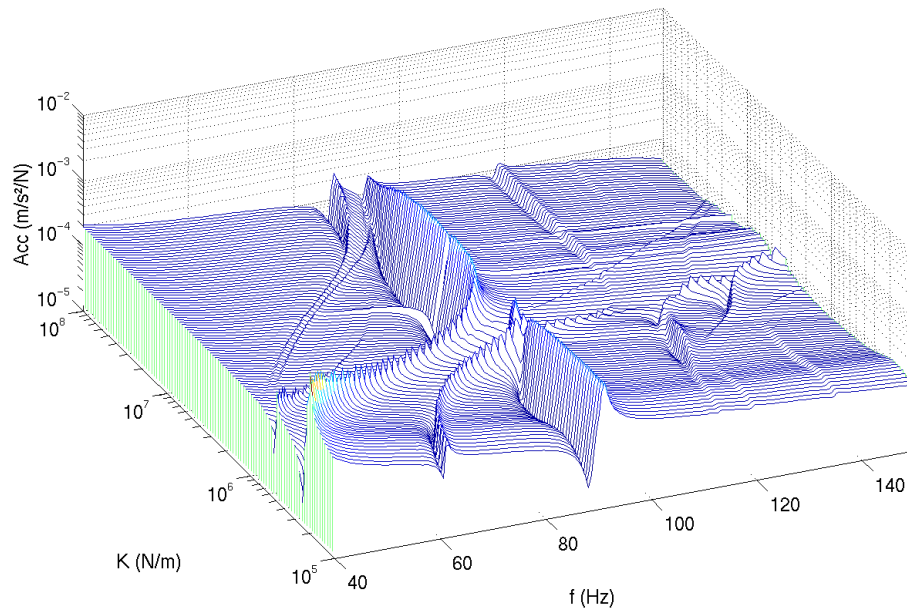


FIG. 3.23 – Évolution d'un transfert en fonction de la raideur des tirants (facteur de perte de 0,01).

L'observation de la résonance autour de  $90\text{Hz}$  est intéressante. Le mode associé à cette résonance est un mode de la plaque. L'évolution de la raideur des tirants n'a donc que très peu d'influence sur ce mode qui s'exprime très localement. On voit cependant que l'interaction avec d'autres modes qui subissent largement l'influence des tirants perturbe le suivi du mode décrit. En suivant l'évolution de ce mode en fonction de la raideur des tirants (à partir d'une raideur  $k_0 = 10^5\text{N.m}^{-1}$  vers des valeurs supérieures), on observe un premier couplage avec un mode d'ovalisation à 3lobes ( $f(k_0) \approx 65\text{Hz}$ ). La fréquence propre de ce mode augmente logiquement rapidement avec l'augmentation de la valeur de la raideurs des tirants. On observe ensuite un deuxième couplage de ce mode avec, cette fois-ci, un mode d'ovalisation à 2 lobes ( $f(k_0) < 40\text{Hz}$ ). Le couplage est très fort et la résonance observée pour des raideurs plus importantes ( $k > 7.10^6\text{N.m}^{-1}$ ) semble être la continuité du mode d'ovalisation à 2 lobes. Il s'agit en fait du mode de la plaque, la fréquence propre du mode d'ovalisation à 2 lobes augmentant et le couplage diminuant. La résonance du mode d'ovalisation à 2 lobes est ensuite à peine visible du fait de la raideur importante des tirants.

En prenant un facteur de perte de l'ordre de grandeur de ceux des matériaux viscoélastiques, on met en évidence l'évolution des amortissements modaux et la difficulté accrue du suivi de modes.

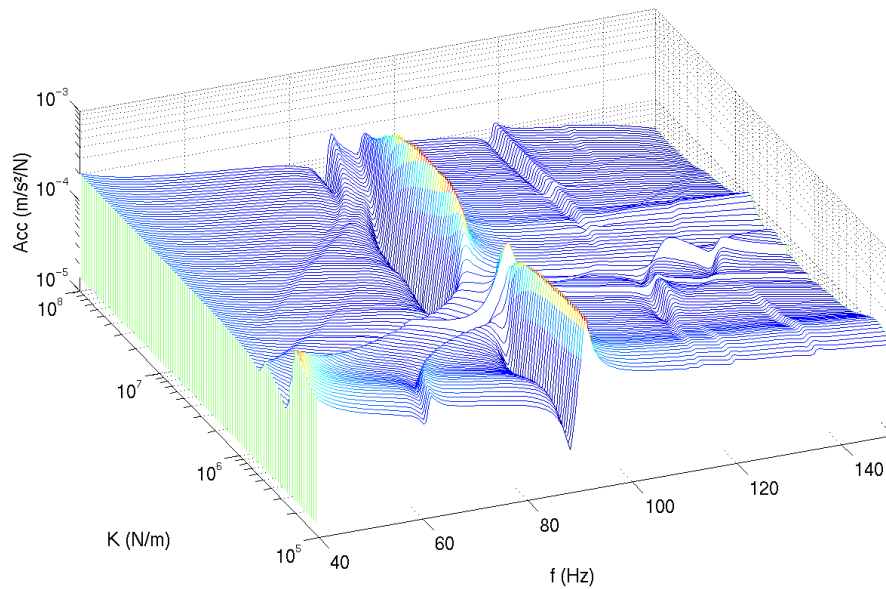


FIG. 3.24 – Évolution d'un transfert en fonction de la raideur des tirants (facteur de perte de 0,1).

### 3.3.3.2 Effet de la masse de la couronne

La couronne rigide supportée par les tirants peut également avoir un effet non négligeable sur l'amortissement de certains modes. L'inertie de celle-ci crée des phénomènes parasites.

Tout d'abord sur les modes de pompage ou de bascule (fig. 3.25), la couronne aura tendance à faire diminuer leur fréquence propre par un effet de masse ajoutée.



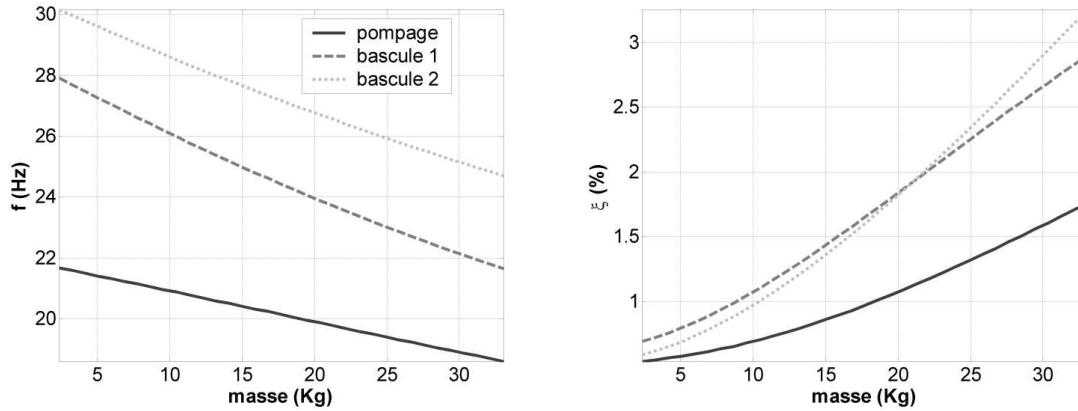


FIG. 3.25 – Évolution de la fréquence et de l’amortissement en fonction de la masse de la modification.

Un autre effet de la masse de la couronne est l’existence de pseudo-modes de corps rigide de celle-ci. Selon sa masse, ces modes ont des répercussions sur les modes de la structure entière. La raideur des tirants est également un facteur d’évolution des ces modes parasites. Ainsi pour des raideurs de tirants relativement faibles et une masse de couronne trop importante, on observe un amortissement des modes de pompage et de bascule.

Pour une masse plus faible, on remarque un couplage des modes rigides de la couronne avec les modes d’ovalisation à deux lobes ou à trois lobes selon la raideur des tirants.

### 3.3.3.3 Effet de la dissipation énergétique

Afin de réaliser un dimensionnement rigoureux d’un dispositif amortissant à base d’élastomères, il peut être nécessaire de s’intéresser aux aspects thermomécaniques de la dissipation qui peut modifier le comportement du polymère, sensible à la température. Les interactions moléculaires internes lors des déformations (en particulier lors de vibrations) se traduisent d’un point de vue macroscopique par une dissipation d’énergie.

Lesieutre et Govindswaly [59] décrivent une méthode de prise en compte de l’augmentation de température induite par le travail de matériaux viscoélastiques. Ils exhibent le phénomène de « thermal runaway » qui peut être très pénalisant dans certaines applications soumises à de forts chargements.

Il s’agit de l’augmentation de la température, dans le cas où le flux thermique n’est pas suffisant pour équilibrer la production de chaleur due au travail de l’élastomère, qui provoque une modification sensible du comportement du matériau viscoélastique.

Pour une application industrielle, ce point doit être très largement pris en considération. On a vu à la section 1.1.3 que l’influence de la température peut être

prise en compte à l'aide d'un facteur de décalage fréquentiel  $\alpha_T$  et d'une fréquence réduite  $\alpha_T f$ . La figure 3.26 montre le facteur de décalage en température du matériau *smactane50* utilisé pour notre application.

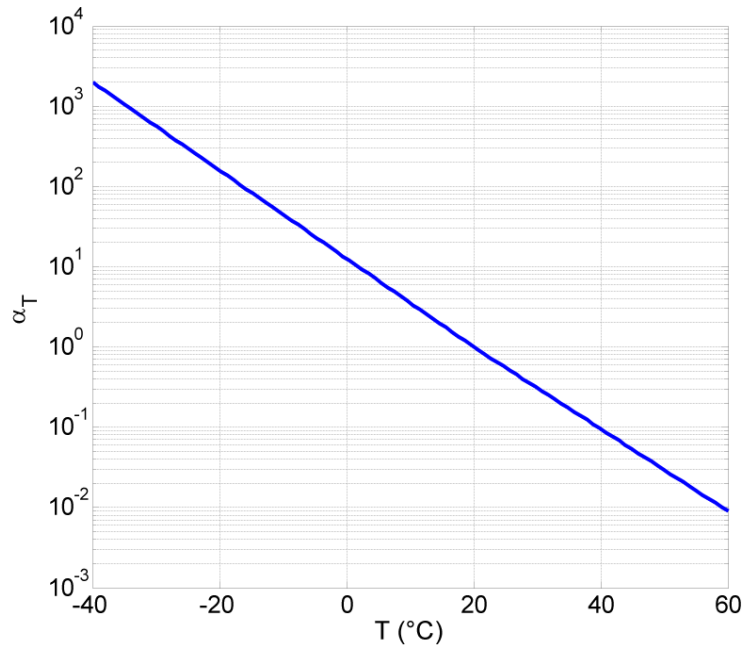


FIG. 3.26 – Facteur de décalage en température du *smactane50*.

Les données matériaux [60] nous permettent de proposer une évaluation quantitative de l'évolution de température lors du travail en cisaillement d'une couche viscoélastique. De nombreuses approximations sont faites notamment sur l'uniaxialité de la diffusion, considérant des épaisseurs petites devant la longueur de la couche. On se place ainsi dans un cas pessimiste de dissipation de chaleur.

Considérons une couche de matériau viscoélastique de  $3\text{mm}$  d'épaisseur, entourée de deux plaques d'aluminium de  $2\text{mm}$  d'épaisseur chacune. Les propriétés thermodynamiques de l'aluminium et d'un polymère sont données dans le tableau 3.4.

matériau	Masse volumique $\rho$ ( $kg/m^3$ )	Capacité calorifique $c_p$ ( $J/(kg.K)$ )	Conductivité thermique $k$ ( $W/(m.K)$ )	Diffusivité thermique $\alpha$ ( $m^2/s$ )
aluminium	2700	900	237	$9,6.10^{-5}$
polymère	1120	1470	0,25	$1,5.10^{-7}$

TAB. 3.4 – Propriétés thermodynamiques de l'aluminium et d'un polymère pour une température  $T = 20^\circ C$

On considère une sollicitation harmonique de  $25N$  à une fréquence  $f = 36Hz$  appliquée normalement au cylindre. La localisation de l'effort et le mode principalement excité sont donnés sur la figure 3.27.

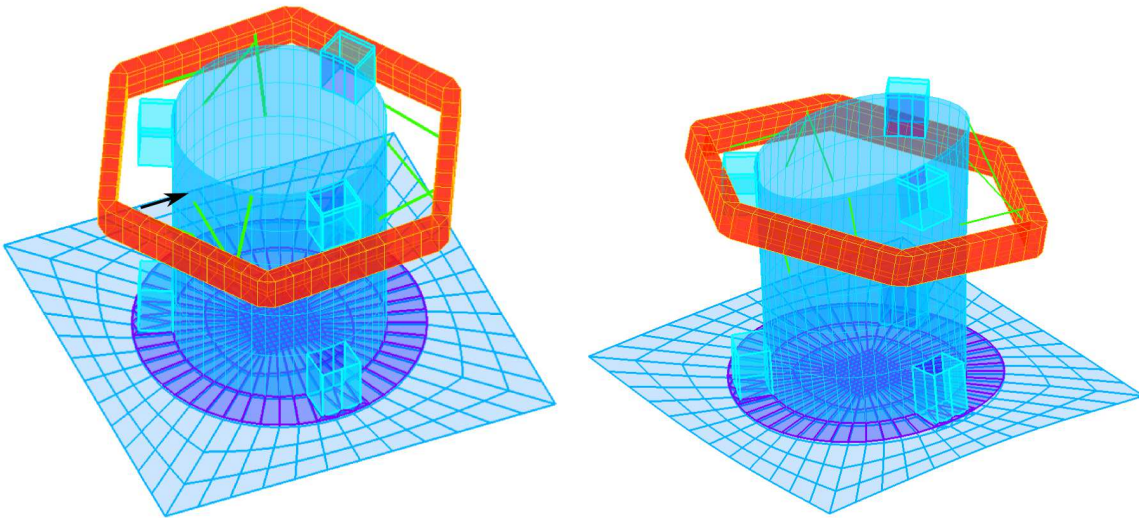


FIG. 3.27 – Application d'un effort normalement au cylindre.

L'application de cet effort donne lieu, pour le tirant le plus sollicité, à un étirement maximal d'amplitude  $A_{dep} = 2,3.10^{-5}m$ , soit une puissance d'environ  $P = 1W$ . Quatre volumes de matériaux viscoélastiques participent à la dissipation d'énergie vibratoire en chaleur soit un volume total  $V = 4 \times (3,5.10^{-2} \times 3.10^{-2} \times 3.10^{-3}) = 1,26.10^{-5}m^3$ .

On suppose un échange thermique avec l'air par convection en considérant un coefficient d'échange thermique à l'interface entre le métal et l'air. On impose une température constante  $T_0 = 20^\circ C$  à l'air suffisamment loin du dispositif.

L'équilibre thermique est calculé en considérant un cas  $1D$  de diffusion quasi-statique. Les paramètres de l'étude sont donnés sur le schéma de la figure 3.28.

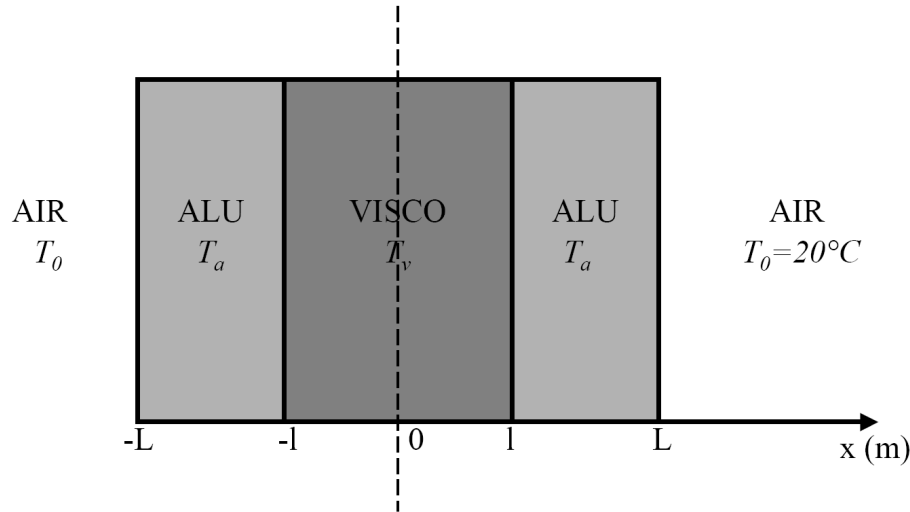


FIG. 3.28 – Définition des paramètres de l'étude de dissipation thermique. On considère une source de chaleur de puissance  $P = 1\text{W}$  dans le volume viscoélastique.

L'équation de la chaleur se réduit donc aux termes

$$\frac{\partial^2 T_v}{\partial x^2} = -\frac{P}{k_v V} \quad (3.1)$$

pour le matériau viscoélastique, où l'on considère une source volumique de chaleur correspondant au travail du matériau,

$$\frac{\partial^2 T_a}{\partial x^2} = 0 \quad (3.2)$$

pour les couches d'aluminium. Les conditions aux limites imposent un flux nul en  $x = 0$  dû à la symétrie du problème

$$\frac{\partial T_v}{\partial x} \Big|_0 = 0, \quad (3.3)$$

la continuité de la température et l'égalité des flux de chaleur à l'interface polymère/aluminium en  $x = l$

$$T_a(l) = T_v(l) \quad (3.4)$$

$$-k_a \frac{\partial T_a}{\partial x} \Big|_l = -k_v \frac{\partial T_v}{\partial x} \Big|_l, \quad (3.5)$$

et un flux de chaleur vers l'extérieur décrit par un coefficient d'échange  $h \approx 15W.m^{-2}.K^{-1}$  tel que

$$-k_a \frac{\partial T_a}{\partial x} \Big|_L = h(T_a(L) - T_0). \quad (3.6)$$

La résolution de ce système d'équations donne le profil de températures présenté sur la figure 3.29.

Cette augmentation de température modifie le comportement du matériau viscoélastique. La figure 3.30 montre des transferts calculés à différentes températures.

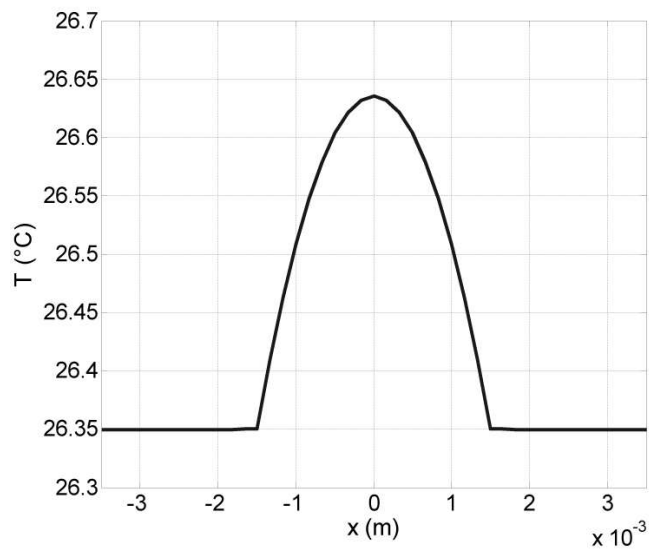


FIG. 3.29 – Profil de températures dans les différentes couches de matériau.

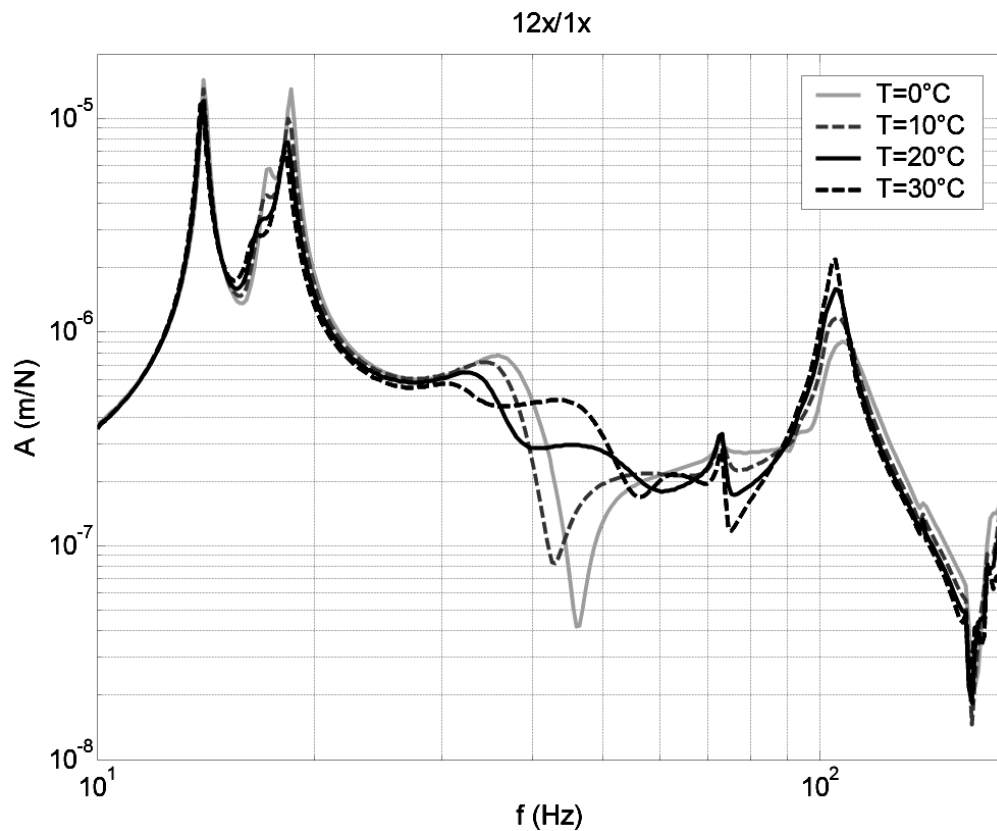


FIG. 3.30 – Transferts calculés pour différentes températures.

L'influence de la température est en effet très nette. On remarque que pour les basses températures, la modification est plus efficace sur les hautes fréquences  $f > 30Hz$ . Et la tendance s'inverse pour les hautes températures pour lesquelles la zone d'efficacité est la zone basses fréquences  $f < 30Hz$ .

Selon l'application désirée, il conviendra de faire le choix le plus approprié pour qu'au cours d'une sollicitation continue de la modification, l'échauffement du matériau joue en faveur de l'amortissement de la réponse.

### 3.3.4 Conception finale

La conception d'un dispositif amortissant pour des modes d'ovalisation est, on l'a vu, assez systématique : réseau de tirants amortis dont le nombre et la position sont à fixer selon le mode considéré, sélection des tirants les plus efficaces... La géométrie de la structure à amortir, l'environnement d'utilisation imposent néanmoins quelques conditions de conception. Ainsi l'utilisation d'une couronne auto-soutenue est parfois à envisager et oblige donc à avoir une répartition régulière des tirants afin de répartir uniformément l'effort statique de support.

La configuration à 9 tirants donne des résultats d'amortissement très satisfaisants. Cette configuration est retenue pour la suite. De plus, afin de maîtriser au mieux le comportement du matériau viscoélastique, il est idéal de limiter la précontrainte statique. Or avec une couronne de masse  $m = 15kg$ , et une configuration à 9 tirants (6 des 9 tirants reprennent le poids de la couronne), les tirants amortis de la section 1.2.2 permettent de limiter les effets de la précontrainte statique difficiles à quantifier sans test approprié.

La configuration retenue pour amortir les vibrations entre  $30$  et  $150Hz$  est composée d'une couronne hexagonale suffisamment rigide (on s'assure que la fréquence du premier mode élastique de la couronne dans l'assemblage complet est supérieure à  $180Hz$ ) liée à la structure initiale par 9 tirants amortis avec  $\theta = \frac{\pi}{3}$ . Le modèle éléments finis et la photo de la structure modifiée sont présentés sur la figure 3.31.

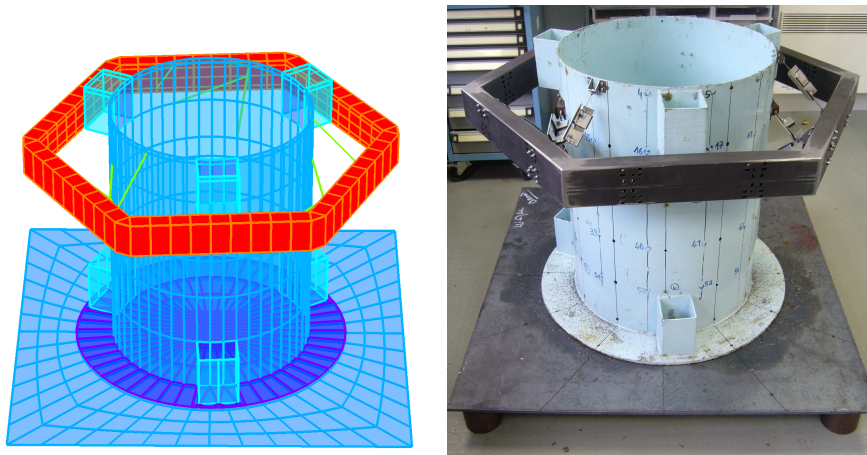


FIG. 3.31 – Modèle éléments finis et photo de la structure modifiée.

Le choix du matériau viscoélastique, enfin, doit être orienté en fonction des conditions d'exploitation, des caractéristiques intrinsèques des matériaux disponibles, etc. Pour la thèse, le *smactane50* a été retenu. Il permet d'atteindre des valeurs de facteur de perte de 0,5 à 0,7 sur la gamme de fréquence qui nous intéresse avec des valeurs de module de cisaillement  $G(f = 10Hz) = 1,3 \cdot 10^6 < G < G(f = 200Hz) = 1 \cdot 10^7 Pa$ .

Une épaisseur de  $3mm$  pour les couches de matériaux viscoélastiques est choisie. Cela correspond à une raideur de  $k = 5,6 \cdot 10^5 N/m$  à  $50Hz$  et à  $20^\circ C$ . On atteint un niveau vibratoire suffisamment bas pour répondre à nos besoins. La configuration finale du tirant correspond au tirant présenté en section 1.2.2.

On vérifie que la dépendance fréquentielle du comportement est suffisamment faible pour valider l'étude réalisée avec un comportement indépendant. La figure 3.32 compare

deux transferts, l'un calculé avec le comportement du *smactane50*, l'autre avec une raideur  $k = 5,6 \cdot 10^5 \text{ N/m}$  et un facteur de perte  $\eta = 0,5$ .

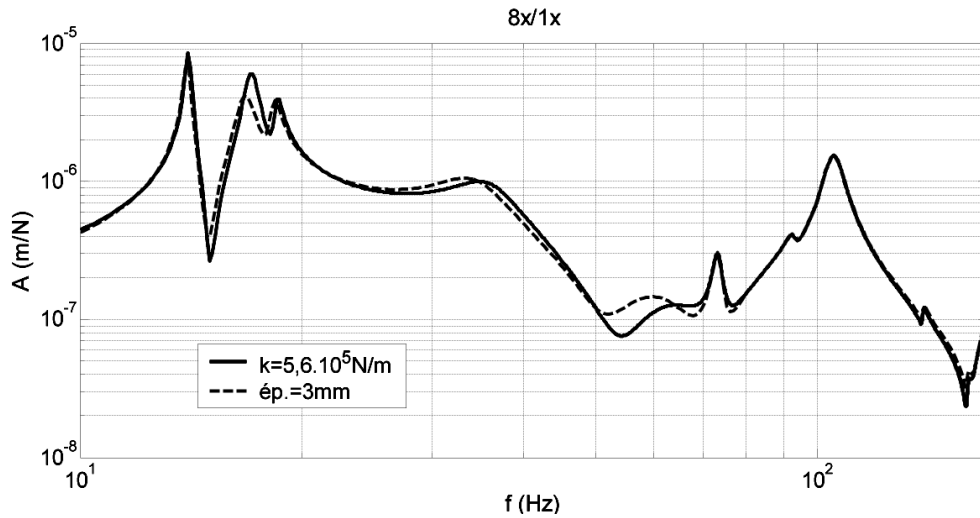


FIG. 3.32 – Transferts calculés avec un comportement exact ( $\text{ép.} = 3\text{mm}$ ) et avec un comportement moyen  $k = 5,6 \cdot 10^5 \text{ N/m}$  et  $\eta = 0,5$ .

Puis on vérifie que, dans cette configuration, le niveau des transferts (exemple sur la figure 3.33) est effectivement très satisfaisant.

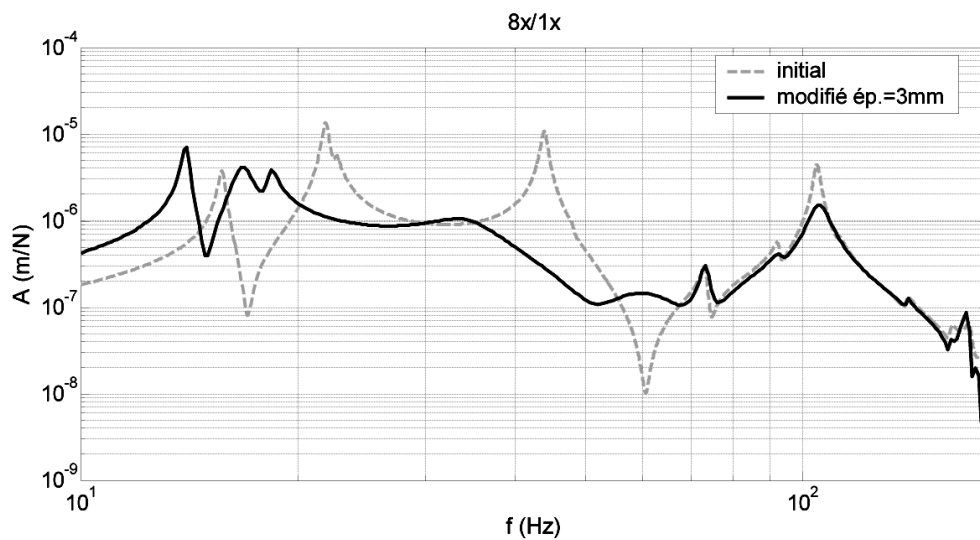


FIG. 3.33 – Transferts avant et après modification avec les tirants de la section 1.2.2.



### 3.4 Analyse modale de la structure modifiée

Une fois la structure modifiée, une analyse modale est pratiquée afin d'évaluer l'efficacité de la modification dissipative et la capacité (ou l'incapacité) du modèle numérique non recalé à prédire l'effet de la modification.

La configuration capteurs est identique à celle utilisée pour l'analyse modale de la structure initiale hormis l'instrumentation de la couronne.

La figure 3.34 montre un transfert mesuré et celui reconstruit à partir des modes identifiés.

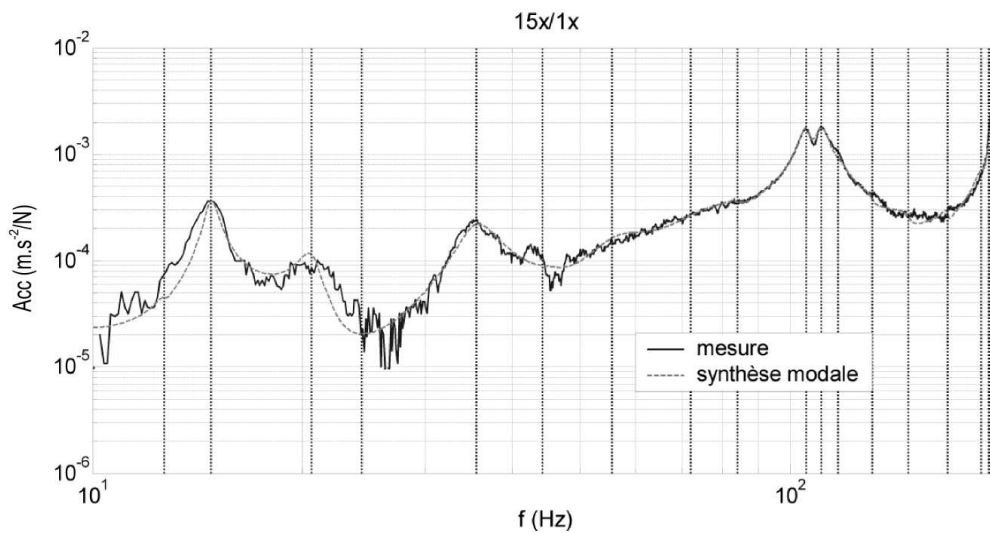


FIG. 3.34 – FRF après modification. FRF expérimentale et reconstruite à partir des modes identifiés en bandes fines.

Les modes identifiés de la structure modifiée sont répertoriés dans le tableau 3.5.

Désignation des modes	$f$ (Hz)	$\xi$ (%)
Pompage	12.6	1,5
Bascule 1	14.9	2,2
Bascule 2	20.7	3,7
CR couronne	24.5	8,0
Ov.2lob.	35.5	6,1
	44.2	6,0
Ov.2lob.	55.6	12,1
	72.0	14,7
Mode de plaque	84.2	4,1
	105.6	2,2
Ov.3lob.	110.7	2,7
	117.1	2,1
Modes de plaque	131.0	1,9
	147.6	2,6
	168.2	0,8
	188.2	1,6
Ov.4lob.	192.9	1,1
	193.6	1,2

TAB. 3.5 – Désignation des modes indentifiés de la structure modifiée, fréquences propres et coefficients d'amortissement modaux.

Les modes identifiés sont relativement nombreux dans la bande de fréquences considérée. En effet la modification dissipative est conçue à l'aide de tirants amortis, et les caractéristiques du matériau viscoélastique sont choisies de telle manière que les modes des tirants sont dans la bande d'efficacité de la modification.

Ainsi autour des modes d'ovalisation à deux lobes, on identifie d'autres modes d'ovalisation mais pour lesquels les déformées de la modification sont perturbées par un couplage avec des pseudo-modes de corps rigides de la couronne.

La figure 3.35 montre tous les modes identifiés présentant une ovalisation à 2 lobes.

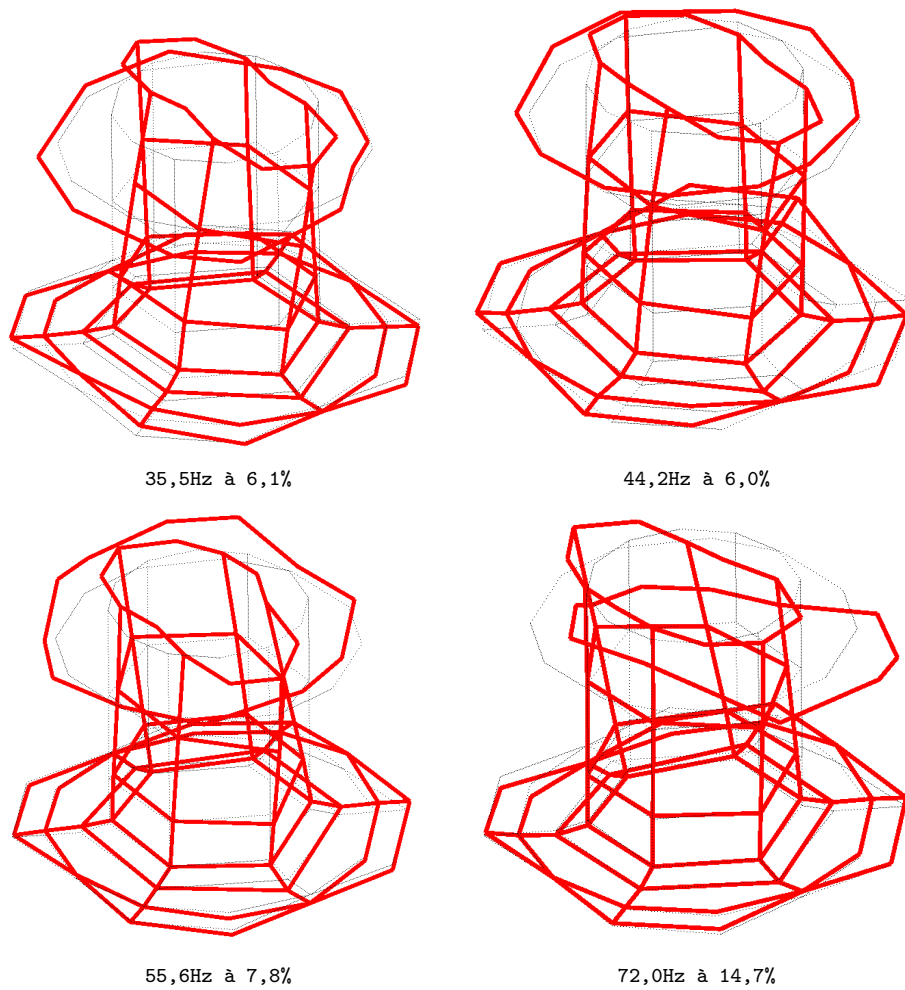


FIG. 3.35 – Modes d’ovalisation à 2 lobes identifiés après modification.

L’identification de ces modes très couplés les uns aux autres n’est pas aisée. D’un point de vue expérimental, il sera raisonnable, par la suite, d’envisager la comparaison des transferts plutôt que de chercher à identifier parfaitement les modes très amortis.

La figure 3.36 montre l’efficacité de la modification proposée et confirme la nécessité de disposer d’une modèle numérique recalé pour espérer prédire l’effet d’une modification à l’aide des méthodes utilisées classiquement pour une phase de reprise de conception.

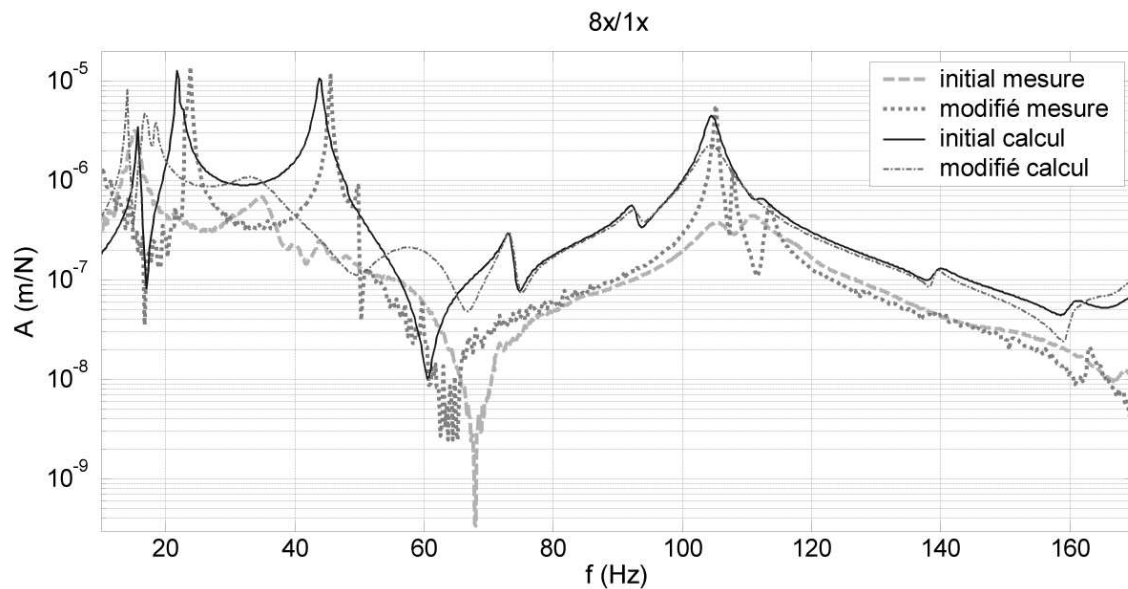


FIG. 3.36 – Comparaison de transferts calculés et mesurés avant et après modification.

### 3.5 Conclusion

Le concept de modification autosupportée par des tirants amortis a été validé dans ce chapitre. On a vu l'efficacité d'une telle configuration pour l'amortissement de modes d'ovalisation.

En revanche le calcul de l'effet de la modification à partir d'un modèle numérique de la structure initiale réalisé sans recalage, hormis quelques paramètres réglés à la main, n'est pas prédictif.

Les méthodes de recalage permettent de disposer d'un modèle représentatif d'une structure sur une bande de fréquence très grande. Ces méthodes permettent donc de prédire l'effet d'une modification structurale sur celle-ci. Les méthodes de sous-structuration dynamiques sont en effet bien maîtrisées et le couplage de deux sous-structures numériques ne pose pas de problème particulier.

La phase de recalage est cependant une étape très coûteuse puisqu'elle réclame un nombre important de mesures et ne peut pas être automatisée de façon robuste. Dans le contexte industriel d'EDF, cette étape n'est donc pas envisageable. EDF est un exploitant et ne dispose généralement pas de modèles numériques représentatifs de ces structures d'exploitation. Les limitations en conception de modèles imposées par le contexte, lui-même, rend l'utilisation d'autres méthodes de prédiction indispensable.

On propose donc au chapitre suivant l'étude de méthodes de prédiction de l'effet

---

d'une modification dissipative sur une structure à partir de données expérimentales incomplètes. Des méthodes de modifications structurales qui permettent d'écrire un couplage entre sous-structures basé uniquement sur les données expérimentales existent. Elles présentent néanmoins quelques limitations. Corus [16] a proposé une méthode plus appropriée qui a été éprouvée dans un cadre industriel pour des modifications sans amortissement. On propose ici de l'étendre à un contexte avec amortissement pour l'adapter à la conception de dispositifs dissipatifs.

# Chapitre 4

## Revue bibliographique des méthodes de modification structurale

Dans le cadre industriel d'EDF présenté en section 3.1, et à la suite du bilan des méthodes classiques de conception dressé à la section 3.5, il est nécessaire de s'intéresser à des méthodes de modification structurale pour la conception de dispositifs amortissants.

Que ce soit pour répondre aux besoins de réactivité d'EDF, ou à l'impossibilité de construire un modèle recalé d'une structure, certaines méthodes de modification structurale présentent des atouts conséquents.

Dès les années 1980, des méthodes permettant de prédire l'effet d'une modification sur une structure ont vu le jour. Les méthodes de modification structurale se répartissent en trois groupes. Le recalage de structure aux éléments finis, les méthodes d'impédance ou les méthodes modales. De nombreux auteurs ont contribué au développement de ces méthodes [83], [64], [32], [89].

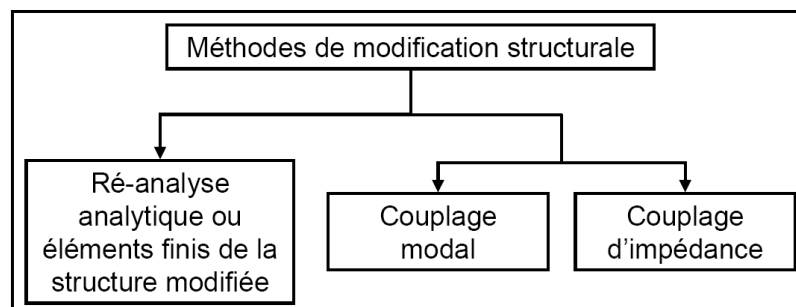


FIG. 4.1 – Classification des méthodes de modification structurale.

Les méthodes de recalage de modèles ne répondent évidemment pas aux besoins de réactivité. En revanche les autres méthodes basées sur l'utilisation directe de données expérimentales ont des formulations intéressantes. La méthode par couplage d'impédance, présentée en section 4.1.3, utilise directement les impédances provenant de l'analyse modale de la structure initiale. La méthode modale, présentée en section 4.1.4, utilise, quant à elle, un modèle modal de la structure d'origine.

La section 4.2 présente les limitations des méthodes classiques de modification structurale qui ont poussé EDF à financer des travaux pour améliorer leurs performances.

La section 4.3 présente la méthode de modification structurale développée par EDF [16]. On y expose tout d'abord les outils théoriques et les concepts nécessaires à la formulation de la méthode. On donne ensuite une mise en équation de la méthode et on conclut avec une description des étapes nécessaires à sa mise en œuvre industrielle.

## 4.1 Méthodes classiques de modification structurale : outils et formulations

L'analyse modale expérimentale peut fournir différentes représentations expérimentales d'une structure (section 4.1.1) : une représentation par matrice d'impédance, construite directement à partir des réponses fréquentielles mesurées, ou la construction d'un modèle modal à partir de l'identification.

Ces deux représentations sont chacune le point d'origine d'une méthode classique de modification structurale. La méthode de couplage d'impédance (section 4.1.3) dont la formulation est directement liée à la flexibilité dynamique du système, et la méthode modale (section 4.1.4) travaillant sur la raideur dynamique.

La méthode modale est en fait un cas particulier de sous-structuration dynamique, dont on présente les principes en section 4.1.2, pour lequel la structure de base est décrite par un modèle modal.

### 4.1.1 Modèle de la structure d'origine

L'objectif de cette section n'est pas de réaliser un exposé exhaustif sur les différentes techniques d'analyse modale et d'identification des paramètres modaux. Cependant, ces techniques constituent le point de départ dans la mise en œuvre des méthodes de modification structurale, il convient donc d'en présenter les principes. Pour une présentation plus détaillée de la mise en œuvre expérimentale des méthodes d'analyse modale et les techniques d'identification, on se référera notamment à [46] et [32]. Il existe deux grandes classes de méthodes d'identification. Les méthodes d'identification fréquentielles et les méthodes temporelles. Seuls les principes des méthodes fréquentielles sont présentés dans cette section.

Les méthodes d'analyse modale expérimentale permettent de déterminer et d'analyser le comportement dynamique d'une structure en connaissant le transfert entre les

entrées  $\{u\}$  appliquées et les sorties  $\{y\}$  mesurées. La matrice des FRF décrivant ce transfert est définie par

$$\{y\} = [H] \{u\}. \quad (4.1)$$

En pratique, l'estimation des FRF est réalisée à partir d'un des estimateurs statistiques  $[H_1]$  ou  $[H_2]$ . Ces deux estimateurs sont construits sur la corrélation entre  $\{\hat{u}\}$  et  $\{\hat{y}\}$ , les transformées de Fourier des signaux temporels associées aux entrées  $\{\tilde{u}\}$  et aux sorties  $\{\tilde{y}\}$ .  $[H_1]$  et  $[H_2]$  sont définies par

$$\begin{aligned} [H_1] &= \frac{E\left(\{\hat{y}\}^H \{\hat{u}\}\right)}{E\left(\{\hat{u}\}^H \{\hat{u}\}\right)}, \\ [H_2] &= \frac{E\left(\{\hat{y}\}^H \{\hat{y}\}\right)}{E\left(\{\hat{u}\}^H \{\hat{y}\}\right)}. \end{aligned}$$

Selon le type de test, on emploiera  $[H_1]$  ou  $[H_2]$ . On peut montrer que  $[H_1]$  est non biaisé pour un bruit sur les sorties non corrélé et que  $[H_2]$  est non biaisé pour un bruit non corrélé sur les entrées.

Afin de limiter les erreurs liées aux conditions de mesure (position des capteurs, excitateurs, bruits sur la chaîne d'acquisition, faibles non linéarités de la structure, etc.), il est nécessaire de réaliser une moyenne sur plusieurs tests « identiques ». Dans le cas idéal, si on excite successivement tous les points de mesure dans toutes les directions de mesure et que toutes les directions de mesure sont instrumentées, il est théoriquement possible de reconstruire complètement la matrice de flexibilité de la structure associée à la discrétisation spatiale du test effectué. Cependant, en pratique, on ne dispose que de la mesure de quelques colonnes ou lignes de la matrice de flexibilité, sur une bande de fréquence limitée. Cette information partielle peut être directement utilisée pour mettre en œuvre les méthodes de modification structurale par couplage d'impédance (voir la section 4.1.3).

Plus généralement, on cherchera à reconstruire un modèle modal de la structure qui, par utilisation de la réciprocité donnera une flexibilité sans termes résiduels mais complète (toutes combinaisons entrée/sortie).

Pour extraire les paramètres modaux des FRF expérimentales, de nombreuses méthodes d'identification peuvent être mises en œuvre. La recherche s'effectue par la minimisation d'une fonctionnelle caractéristique de la distance entre les mesures et un modèle pôles/résidus

$$\underset{\lambda, [R_k], BF, HF}{\text{ArgMin}} \left( \left\| [H(\omega)_{test}] - \sum_{k=1}^{N_{id}} \left( \frac{[R_k]}{(j\omega + \lambda_k)} + \frac{[\bar{R}_k]}{(j\omega + \bar{\lambda}_k)} \right) + \frac{BF}{\omega^2} + HF \right\|^2 \right). \quad (4.2)$$



Le terme constant  $HF$  prend en compte l'influence des modes plus hautes fréquences dans la bande d'analyse, et correspond aux résidus associés aux corrections statiques,  $BF/\omega^2$  celle des modes situés plus bas en fréquence lorsque des modes sont présents dans une bande de fréquence inférieure à la fréquence minimale d'intérêt de l'identification.

De nombreuses méthodes sont disponibles pour résoudre (4.2). Il n'est pas ici question d'exposer toutes les solutions qu'il est possible d'implémenter. Pour plus de détails sur la mise en place expérimentale de ces méthodes, leurs caractéristiques et les résolutions possibles de (4.2), se référer à [46], [64] ou [32].

Le passage d'un modèle pôle/résidus (4.2) à un modèle de synthèse des modes normaux de la structure (4.5) suppose une hypothèse supplémentaire. Pour la recherche des termes de  $[R_k]$ , on ne pose *a priori* aucune hypothèse. Cependant, le modèle identifié, pour correspondre à la description d'un système mécanique linéaire, doit être réciproque. Cette condition est traduite par la symétrie des matrices de masse et de raideur du modèle EF équivalent de la structure. Dans le cas d'un modèle réalisé à partir d'une analyse modale, cette condition se traduit par la positivité de la partie imaginaire des résidus associés aux tests colocalisés. Lorsque cette condition est vérifiée, les expressions de  $[R_k]$  et  $\lambda_k$  s'écrivent

$$[R_k] = j \frac{[c] \{\phi\}_k \{\phi\}_k^T [b]}{2\omega_k \sqrt{1 - \xi_k^2}}, \quad (4.3)$$

$$\lambda_k = \xi_k \omega_k + j \omega_k \sqrt{1 - \xi_k^2}. \quad (4.4)$$

On peut alors exprimer la rigidité dynamique de la structure en coordonnées généralisées

$$[Z(s)] = [s^2 [Id] + s [\backslash 2\xi_j \omega_j \backslash] + [\backslash \omega_j^2 \backslash]]. \quad (4.5)$$

L'écriture (4.5) est l'équation de base permettant de mettre en œuvre les méthodes modales de modification structurale (section 4.1.4).

Cependant, pour de multiples raisons, même lorsque les conditions de réciprocité sont assurées pour la réalisation pratique de l'essai, il est possible que la partie imaginaire de certains résidus associés à un test colocalisé (i.e. mesure et application de l'effort au même point et dans la même direction) ne soit pas positive. Dans ce cas, il est nécessaire de définir un processus régularisant pour assurer la construction d'un modèle réciproque minimal de la structure testée. La référence [2] détaille la technique utilisée dans cette thèse.

### 4.1.2 Sous-structuration dynamique et réduction de modèles

La sous-structuration dynamique joue un rôle primordial dans l'analyse des structures complexes. Elle consiste à découper la structure en plusieurs sous-structures

qui sont analysées séparément puis à résoudre le problème complet grâce à des relations d'interface entre les sous-structures.

Dans cette section, on ne considère que des systèmes non amortis pour la clarté de l'exposé. Cependant les expressions écrites sont valables pour des systèmes amortis. La synthèse modale correspond à l'assemblage classique de modèles de composants isolés. En considérant deux composants 1 et 2 d'une structure pris isolément, on peut écrire pour chacun la relation fondamentale de la dynamique avec les ddl d'interface d'une part et les ddl complémentaires d'autre part

$$\left[ -\omega^2 \begin{bmatrix} M_{II}^i & M_{IC}^i \\ M_{IC}^{iT} & M_{CC}^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{II}^i & K_{IC}^i \\ K_{IC}^{iT} & K_{CC}^i \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} q_I^i \\ q_C^i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_I^i + f_{Iext}^i \\ f_C^i \end{Bmatrix}, \quad i = 1, 2 \quad (4.6)$$

où  $f_I^i$  sont les efforts de couplage à l'interface  
 $f_C^i$  les efforts extérieurs appliqués sur les ddl complémentaires  
 $f_{Iext}^i$  les efforts extérieurs appliqués à l'interface

En formulation forte, l'hypothèse de liaison parfaite entre les composants se traduit par la continuité du déplacement et la nullité du saut de contrainte normale. En formulation faible (principe des travaux virtuels), ces deux conditions correspondent à la continuité de la solution et des champs virtuels. La méthode de Ritz-Galerkin généralement utilisée propose une approximation de la solution en discrétisant le problème [69].

Avec des maillages compatibles à l'interface, la continuité des champs de déplacement et des fonctions tests se traduit par

$$\{q_I^1\} = \{q_I^2\} = \{q_I\} \quad (4.7)$$

La nullité du travail des efforts de couplage à l'interface pour les fonctions tests  $\{\hat{q}_I\}$  vérifiant l'équation précédente se traduit par

$$\{\hat{q}_I\}^T \{f_I^1\} + \{\hat{q}_I\}^T \{f_I^2\} = 0 \quad (4.8)$$

Dans l'hypothèse de deux structures sans effort extérieur (une structure de base repérée par l'exposant  $B$  et une modification repérée par l'exposant  $M$ ), l'expression du couplage prend la forme

$$[Z^{B+M}] = \left[ -\omega^2 \begin{bmatrix} M_{CC}^B & M_{CI}^B & 0 \\ M_{IC}^B & M_{II}^B + M_{II}^M & M_{IC}^M \\ 0 & M_{IC}^M & M_{CC}^M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{CC}^B & K_{CI}^B & 0 \\ K_{IC}^B & K_{II}^B + K_{II}^M & K_{IC}^M \\ 0 & K_{CI}^M & K_{CC}^M \end{bmatrix} \right],$$

$$[Z^{B+M}] \begin{Bmatrix} q_C^B \\ q_I \\ q_C^M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (4.9)$$

Pour de nombreuses applications, il est intéressant de réduire le problème sur un sous-espace particulier. Le comportement de chaque sous-structure est alors caractérisé par un nombre de ddl généralisés largement inférieur au nombre de ddl « physiques » ce qui permet de réduire considérablement la taille du problème. Les bases de réduction utilisées doivent rendre compte du comportement global de la structure.

$$\{q\}_{N \times 1} = [T]_{N \times N_g} \{\eta\}_{N_g \times 1} \quad (4.10)$$

L'approximation de Ritz permet alors l'obtention d'un problème de taille  $N_g \times N_g$  bien inférieur à  $N \times N$ .

$$[T]^T [Z] [T] \{\eta\} = [T]^T \{f\} \quad (4.11)$$

Le choix du sous-espace conditionne directement la qualité du résultat. Dans le cas particulier de la sous-structuration dynamique, le sous-espace engendré par  $[T]$  doit

- rendre compte du comportement dynamique des différentes sous-structures dans la bande d'analyse du problème
- rendre compte du comportement quasistatique.

Les méthodes de choix des sous-espaces sont nombreuses. La méthode de MacNeal est une des plus connues parmi les méthodes dites à interface libre ; celle de Craig & Bampton pour les méthodes à interface fixe.

La base  $[T_{MN}]$  proposée par MacNeal [63] est composée :

- d'une base tronquée de  $N_L$  modes issues de la base des modes à interface libre  $[\phi_{libre}]_{N_L}$  et
- d'une base de  $N_A$  modes d'attache correspondants aux déplacements des ddl complémentaires pour un effort statique unitaire appliqué aux ddl d'interface.

La base du sous-espace prend la forme

$$[T_{MN}] = \left[ \underbrace{\begin{Bmatrix} [\phi_{libre}]_C \\ [\phi_{libre}]_I \end{Bmatrix}}_{\text{modes à interface libre}} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} [K_{CC}] & [K_{CI}] \\ [K_{IC}] & [K_{II}] \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} [0] \\ [Id] \end{Bmatrix}}_{\text{modes d'attache}} \right]_{N_A} \quad (4.12)$$

Dans le cas de structure avec des modes de corps rigides, le concept de modes d'attache doit subir des évolutions. Géradin et Rixen dans [36] et Farhat et Géradin

dans [33] proposent des solutions à ce cas.

Parmi les méthodes à interface fixe, la base  $[T_{C\&B}]$  proposé par Craig & Bampton [19] est composée :

- d’une base tronquée de  $N_F$  modes issue de la base des modes à interfaces fixe  $[\phi_{fixe}]_{N_F}$  et
- d’une base de  $N_C$  modes de contraintes correspondant au relèvement statique d’un déplacement unitaire des ddl d’interface sur les ddl complémentaires (condensation statique ou de Guyan).

La base du sous-espace prend la forme

$$[T_{C\&B}] = \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} [\phi_{fixe}]_C \\ [0]_I \end{bmatrix}}_{N_F} & \underbrace{\begin{bmatrix} -[K_{CC}]^{-1}[K_{CI}] \\ [Id] \end{bmatrix}}_{N_C} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

modes à interface fixe      modes de contrainte

D’autres méthodes à interface chargée ont été également développées, les méthodes de MacNeal et Craig & Bampton étant des méthodes correspondant à un chargement particulier.

La sous-structuration dynamique a largement contribué au développement numérique de l’analyse de la dynamique de structures de plus en plus complexes. Des développements de méthodes de décomposition de domaines [34] ont permis l’amélioration des analyses numériques.

Le point de vue expérimental n’est pas en reste. La synthèse de modes par composants [47] autorise a priori le couplage des modèles expérimentaux dans la mesure où un certain nombre d’informations est disponible. Les méthodes de modification structurale sont fondées sur ce principe. La référence [21] passe en revue les différentes méthodes et principes qui régissent la synthèse de modes par composants.

### 4.1.3 Formulation multiplicative ou méthode de couplage d’impédance

Des méthodes utilisant directement les impédances ont également été formulées ([49], [24], [70], [32], [83]). Il s’agit de combiner les matrices de réponses fréquentielles de chaque sous-structure prise isolément. L’avantage de ces méthodes est l’utilisation directe des réponses fréquentielles et donc l’absence de problèmes de troncature inhérents à toute méthode modale. En revanche, elles nécessitent la connaissance complète, en tout point de l’interface et pour toute fréquence d’intérêt, des matrices de réponses fréquentielles. Ce dernier point rend la méthode difficilement applicable en pratique, soit du fait de la taille de l’interface, soit du fait de la non connaissance a priori de l’interface.

Ewins [32] donne une expression du couplage dans le cas simple d'une liaison à un ddl et généralise la méthode aux cas à plusieurs ddl.

Appliquons le raisonnement au cas de la modification structurale. Considérons donc une structure de base  $B$  et une modification  $M$ . La structure  $B$  est décrite par la matrice des réponses fréquentielles de chaque ddl (matrice d'impédance) alors que la modification est connue par ses matrices caractéristiques de masse, de raideur et d'amortissement.

Dans le cas où la matrice d'impédance  $H^B$  est complète<sup>1</sup>, l'expression

$$[Z^B] = [H^B]^{-1} \quad (4.14)$$

est valable et on peut écrire simplement l'équation de couplage entre les sous-structures

$$[Z^{B+M}] = \begin{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} [H_{CC}^B] & [H_{CI}^B] \\ [H_{IC}^B] & [H_{II}^B] \end{bmatrix} \right)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & [Z_{II}^M] & [Z_{IC}^M] \\ 0 & [Z_{CI}^M] & [Z_{CC}^M] \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

On choisit alors de mettre  $[H^B]^{-1}$  en facteur<sup>2</sup>

$$[Z^{B+M}] = \left( \begin{bmatrix} Id & 0 & 0 \\ 0 & Id & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & [Z_{II}^M] & [Z_{IC}^M] \\ 0 & [Z_{CI}^M] & [Z_{CC}^M] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [H_{CC}^B] & [H_{CI}^B] & 0 \\ [H_{IC}^B] & [H_{II}^B] & 0 \\ 0 & 0 & [A] \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} [H_{CC}^B] & [H_{CI}^B] \\ [H_{IC}^B] & [H_{II}^B] \end{bmatrix} \right)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & [A]^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

où  $A$  est une matrice inversible de la taille de  $[Z_{CC}^M]$ . On obtient alors directement l'expression de  $H^{B+M}$  par inversion de 4.16

$$[H^{B+M}] = \begin{bmatrix} [H_{CC}^B] & [H_{CI}^B] & 0 \\ [H_{IC}^B] & [H_{II}^B] & 0 \\ 0 & 0 & [A] \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} Id & 0 & 0 \\ 0 & Id & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & [Z_{II}^M] & [Z_{IC}^M] \\ 0 & [Z_{CI}^M] & [Z_{CC}^M] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [H_{CC}^B] & [H_{CI}^B] & 0 \\ [H_{IC}^B] & [H_{II}^B] & 0 \\ 0 & 0 & [A] \end{bmatrix} \right)^{-1}. \quad (4.17)$$

<sup>1</sup>L'exposé est ici proposé avec une matrice d'impédance complète, même si la connaissance uniquement des matrices à l'interface suffit à déterminer l'effet de la modification

<sup>2</sup>L'inverse d'une matrice diagonale par blocs, quand il existe, est égal à la matrice diagonale de l'inverse des blocs.

Cuppens, Sas, et Hermans [25] dressent un bilan intéressant sur les méthodes de couplage de sous-structures et comparent notamment les méthodes basées sur le couplage de réponses fréquentielles (section 4.1.3) aux méthodes modales (section 4.1.4) pour une application automobile. Park [72] propose, quant à lui, une vision « problème inverse » de la méthode multiplicative sur des exemples d'ajouts ponctuels de masses et de raidisseurs.

#### 4.1.4 Formulation additive ou méthode modale

La formulation additive du couplage présente de nombreux avantages puisqu'elle permet l'écriture du couplage en considérant les modes propres de la structure. Cette méthode est notamment reprise dans [83], [28] et [64].

Elle consiste à utiliser une description modale de la structure initiale (équation 4.5) plutôt que ces matrices caractéristiques. Cela permet d'inscrire directement la méthode additive dans un cadre expérimental puisqu'elle utilise les données d'identification.

À l'origine, Fox & Kapoor [35] avaient proposé une méthode de modification structurale fondée sur l'analyse de sensibilité des valeurs et vecteurs propres en considérant des perturbations au premier ordre par rapport à un paramètre d'intérêt  $p$  du système.

$$[\Delta M] = \frac{\partial}{\partial p} [M(p)] \delta p \quad (4.18)$$

$$[\Delta K] = \frac{\partial}{\partial p} [K(p)] \delta p \quad (4.19)$$

On modifie directement les matrices du système en considérant les perturbations en masse  $\Delta M$  et en raideur  $\Delta K$ .

$$([Z] + s^2 \Delta M + \Delta K) \{q\} = \{f\} \quad (4.20)$$

Cette méthode a très rapidement été limitée. Seules des modifications ponctuelles définies sur les nœuds du maillage peuvent être considérées. Pour permettre de prendre en compte des modifications plus complexes, de nouvelles méthodes ont vu le jour, inspirées des méthodes de sous-structuration dynamique (section 4.1.2).

Pour écrire le couplage entre le modèle modal de la structure initiale et la modification, il est nécessaire de disposer d'une base  $[\phi_I^B]$  de représentation des mouvements à l'interface  $\{q_I\}$  sur les ddl généralisés de la structure de base  $\{\eta^B\}$ .

La continuité des déplacements prend alors la forme suivante :

$$\{q_I^B\} = \{q_I^M\} = [\phi_I^B] \{\eta^B\} \quad (4.21)$$

On peut donc écrire d'une part pour la structure de base et d'autre part pour la modification :

$$\left(-\omega^2 [Id] + j\omega [\Gamma^B] + [\Omega^B]^2\right) \{\eta^B\} = \begin{bmatrix} [\phi_C^B] \\ [\phi_I^B] \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{array}{l} \{f_C^B\} \\ \{f_I^B\} + \{f_{I_{ext}}^B\} \end{array} \right\} \quad (4.22)$$

$$\begin{bmatrix} [Z_{CC}^M] & [Z_{CI}^M] [\phi_I^B] \\ [\phi_I^B]^T [Z_{IC}^M] & [\phi_I^B]^T [Z_{II}^M] [\phi_I^B] \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \{q_C^M\} \\ \{\eta^B\} \end{array} \right\} = \left\{ [\phi_I^B]^T (\{f_I^M\} + \{f_{I_{ext}}^M\}) \right\} \quad (4.23)$$

Les conditions d'équilibre des efforts généralisés s'écrivent

$$\{\eta^B\}^T [\phi_I^B]^T \{f_I^B\} + \{\eta^B\}^T [\phi_I^B]^T \{f_I^M\} = \{0\}. \quad (4.24)$$

On aboutit ensuite à

$$[Z^{B+M}] \left\{ \begin{array}{l} \{\eta^B\} \\ \{q_C^M\} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} [\phi_C^B]^T (\{f_C^B\} + [\phi_I^B]^T (\{f_{I_{ext}}^B\} + \{f_{I_{ext}}^M\})) \\ \{f_C^M\} \end{array} \right\}. \quad (4.25)$$

où

$$[Z^{B+M}] = \begin{bmatrix} \left(-\omega^2 [Id] + j\omega [\Gamma^B] + [\Omega^B]^2\right) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

$$+ \begin{bmatrix} [\phi_I^B]^T [Z_{II}^M] [\phi_I^B] & [\phi_I^B]^T [Z_{IC}^M] \\ [Z_{CI}^M] [\phi_I^B] & [Z_{CC}^M] \end{bmatrix}.$$

Le fait d'exprimer le problème aux valeurs propres à l'aide des pulsations propres, des amortissements propres et des déformées propres donne à cette méthode l'avantage de pouvoir s'appliquer à une configuration expérimentale.

La limitation de cette méthode est bien entendu les effets de la troncature modale et le manque d'information sur la contribution des modes haute fréquence d'un point de vue expérimental. C'est pourquoi la prise en compte de la contribution basse fréquence (effet statique  $\omega \rightarrow 0$ ) des modes tronqués permet un couplage plus correct (développement de la méthode de MacNeal [29]).

## 4.2 Limitations des méthodes classiques de modification structurale

Les méthodes classiques décrites en section 4.1 nécessitent la connaissance d'informations difficiles voire impossibles à mesurer. La mesure de la flexibilité résiduelle au niveau de l'interface avec la modification est une clé de la qualité de ces méthodes, or ceci implique la connaissance de l'interface avant la mesure.

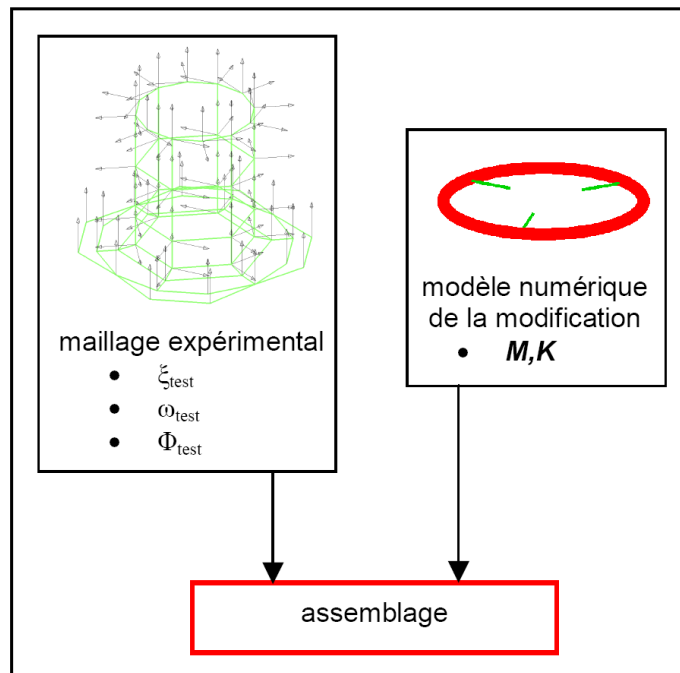


FIG. 4.2 – Les étapes des méthodes classiques de modification structurale

Dans de nombreux travaux, les auteurs ont un accès simple aux mesures notamment aux points d'interface ce qui limite l'application de la méthode à des cas généraux de conception de modifications. Ceci implique que :

- les points d'ancrage des modifications sont accessibles à la mesure,
- les modifications sont connues avant la réalisation de l'essai,
- la structure à traiter est disponible pour un certain nombre d'essais.

Or dans la problématique industrielle d'EDF, l'accès aux mesures est souvent limité et la connaissance des relations d'interface approximative. Il s'agit donc de proposer des évolutions à ces méthodes pour compenser le manque d'information à l'interface.

Une méthode développée au sein d'EDF, la méthode LMME [16] (section 4.3), permet de s'affranchir d'un certain nombre de limitations des méthodes classiques. Les



différentes étapes du processus de prédiction LMME sont schématisées sur la figure 4.3.

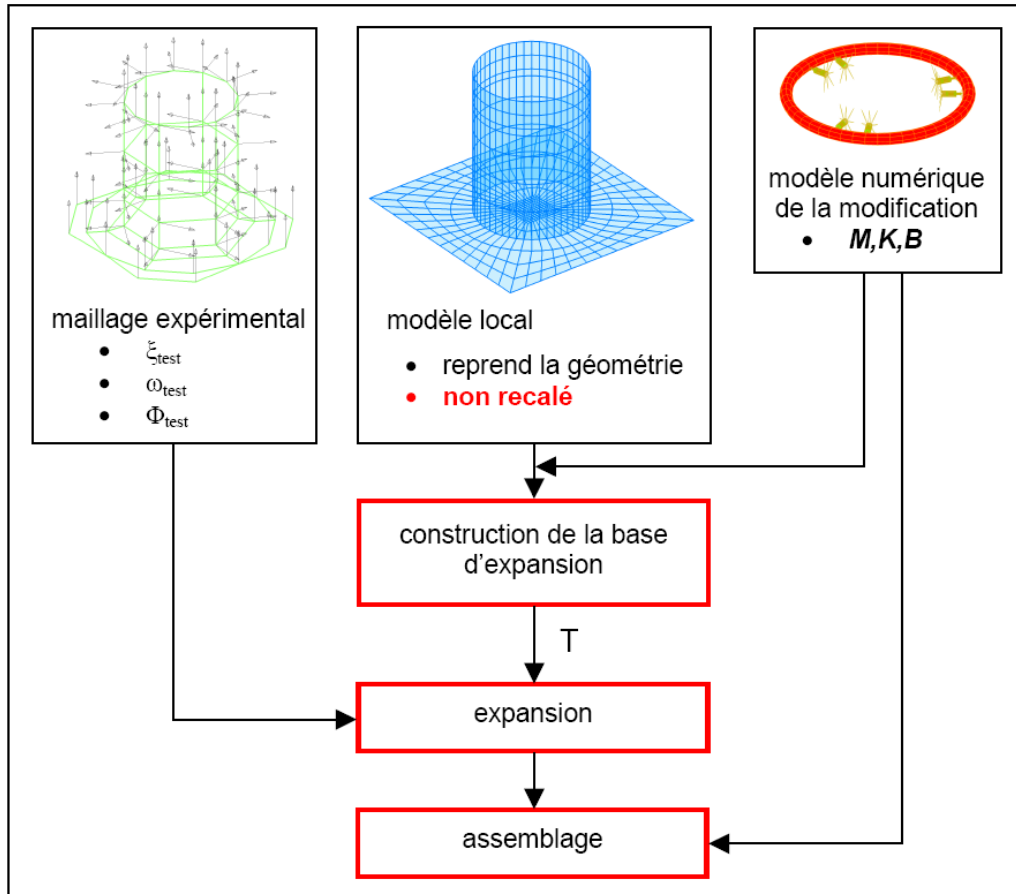


FIG. 4.3 – Les étapes de la méthode LMME

Les points d'évolution par rapport aux méthodes classiques sont la phase d'expansion et l'introduction d'un « modèle local » (section 4.3.1).

L'intégration d'une phase d'expansion permet en effet de limiter le besoin d'avoir à disposition les informations de mesure à l'interface. La construction d'une base d'expansion adéquate n'est pas triviale. Cette opération est détaillée en section 4.3.4. Aussi la méthode s'appuie sur des méthodes de réduction de modèles et d'expansion de données et l'introduction d'un modèle géométrique support de la structure initiale permet de se doter d'une base de fonctions régulières efficace pour la reconstruction de déformées d'interface.

## 4.3 Méthode de modification structurale LMME (Local Model Modeshapes Expansion) : outils et formulation

La méthode de modification structurale proposée dans [16] dérive de la formulation additive du couplage décrite en section 4.1.4 et permet d'améliorer la qualité de la prédiction par l'utilisation de techniques d'expansion et de réduction de modèles.

Elle s'appuie sur des outils que n'exploitent pas ou peu les méthodes de modifications structurales classiques : un modèle local (section 4.3.1), le principe d'expansion de données (section 4.3.2) et de modes d'interface (section 4.3.3).

### 4.3.1 Le modèle local

Les formulations du couplage décrites aux sections 4.1.4 et 4.1.3 nécessitent, on l'a vu, de disposer des mesures aux ddl d'interface. Or cette caractéristique n'est pas en adéquation avec les besoins d'une méthode de prédiction.

Cette caractéristique implique en effet que l'interface avec la modification est représentée par le maillage expérimental, et limite largement les possibilités de conception de la modification.

Corus [16] a donc proposé l'utilisation d'un modèle support permettant de réaliser l'interface entre la structure initiale et la modification et de reconstruire une estimation du mouvement à l'interface à l'aide de techniques d'expansion. Le modèle support est nommé modèle local. Le modèle local permet en outre de disposer d'une base de déformées admissibles. Ce dernier point sera discuté plus largement en section 5.4.1.

Ce modèle local doit remplir quelques conditions :

- contenir les ddl de l'interface
- fournir des déformées cohérentes

La construction du modèle local doit être rapide et même si quelques paramètres sont à ajuster pour atteindre un niveau de cohérence satisfaisant, il ne s'agit pas d'une phase de « recalage » à proprement parler. Le cadre de méthodes des éléments finis permet d'obtenir une famille de déformées avec un certain sens physique, à la différence de courbes construites manuellement (exemple : splines...)

### 4.3.2 Expansion de données

L'expansion de données consiste à étendre de manière cohérente une information contenue en un nombre restreint de points.

Il s'agit généralement en mécanique d'étendre des données expérimentales modales par exemple sur un maillage numérique plus fin que le maillage expérimental.

Les interpolations géométriques (bases linéaires, quadratiques, etc) sont les outils les plus simples d'expansion de données. Lorsqu'un modèle éléments finis est à disposition,

les fonctions de formes associées permettent de construire une base d'expansion pour des structures complexes. Les méthodes d'interpolation basées sur l'utilisation d'un modèle éléments finis sont généralement nommées méthodes d'expansion.

Les méthodes d'expansion de données sur sous-espace s'appuient sur le principe des méthodes de réduction de modèles. En supposant qu'un nombre restreint de ddl permet la représentation du comportement global de la structure, on peut écrire d'une manière formelle que

$$\{q_{complet}\} = [T] \{\eta_{réduit}\}. \quad (4.27)$$

On cherche une estimation cohérente  $\{q_{expand}\}$  du champ de déplacements  $\{q_{complet}\}$  à partir de mesures  $\{q_{test}\}$  spatialement limitées. On résout alors un problème de minimisation tel que

$$\{\eta_{réduit}\} = \underset{\eta}{ArgMin} \| \{q_{test}\} - [c][T] \{\eta\} \|_{[X]}^2, \quad (4.28)$$

où  $c$  est une matrice d'observation liant le maillage expérimental sur lequel est défini  $\{q_{test}\}$  au maillage sur lequel est défini  $T$ . La matrice  $[X]$  est une matrice de régularisation qui permet de niveler les éventuels erreurs et d'améliorer la pertinence de la reconstruction.

L'expansion de données est très dépendante du choix de la base de réduction  $[T]$ . En effet la base choisie doit *a priori* être en mesure de représenter les déformées de la structure testée afin de fournir une reconstruction correcte.

Parmi les méthodes d'expansion, on peut tout d'abord citer les méthodes d'expansion modale [53] ou SEREP [68] (System Equivalent Reduction Expansion Process). Ces bases d'expansion sont construites à partir des premiers modes propres d'un modèle éléments finis. Leur dimension peut être inférieure au nombre de ddl de test  $\{q_{test}\}$ , ce qui apporte à la méthode un effet régularisant.

Les méthodes statiques ou de Guyan [41] utilisent les réponses statiques à des déplacements unitaires au niveau des ddl de test. En considérant la matrice d'observation  $c$ , la base  $T = [K]^{-1} c^T$  représente le même sous-espace que la base de Guyan. Les problèmes de singularité associés aux éventuels modes de corps rigide sont classiquement résolus par un décalage en masse de la raideur  $K$ .

D'autres méthodes permettant la prise en compte d'erreurs sur le modèle ont également été développées comme la méthode MDRE (Minimum Dynamic Residual Expansion) [4].

### 4.3.3 Modes d'interface

Les concepts de réduction de modèles présentés à la section 4.1.2 sont très largement appliqués et intégrés dans la plupart des codes commerciaux de calcul de structures. Cependant, dans le cas de structures avec des interfaces comportant un nombre de ddl important, le modèle réduit reste d'une taille importante. D'autre part, la réduction du modèle se fait au détriment de la topologie des matrices décrivant le problème. Dans le cas du problème complet, les matrices de masse et de raideur sont très creuses. Cette topologie est mise à profit pour résoudre rapidement les problèmes de réponse statique, ce qui permet d'accélérer la recherche des premières (ou dernières) valeurs propres par des méthodes itératives type Lanczos ou IRA/Sorensen. Les problèmes réduits conduisent à des matrices pleines qui peuvent très largement ralentir la résolution du problème réduit, puisque la résolution des problèmes statiques sous-jacents est plus coûteuse. Dans le cas de nombreuses interfaces de grandes tailles, la réduction du modèle par sous-structuration type Craig & Bampton ou MacNeal peut s'avérer plus coûteuse que la résolution du problème complet, et son intérêt est alors limité.

La réduction de modèle a pour objectif de représenter la flexibilité dynamique pour certaines sollicitations (des efforts externes et sur les interfaces) et sur une certaine gamme de fréquence [9]. Les méthodes de réduction combinent donc des vecteurs liés à des calculs statiques (pour représenter les efforts) et des bases modales tronquées (puisque la bande de fréquence d'intérêt est limitée).

Les méthodes présentées dans la section précédente conservent toutes les déformées statiques liées à l'interface. Or dans une bande de fréquences donnée, les déformées possibles de l'interface présentent des propriétés de régularité importantes. Le concept de modes d'interfaces a pour objectif d'exploiter cette propriété. Les points clés sont de définir un problème spectral représentatif permettant de construire une base des déformées d'interface classées en termes de régularité, puis d'utiliser la troncature modale pour éliminer les déformées d'interface trop irrégulières.

Par exemple, les modes d'interface introduits dans [20] sont associés à chacune des sous-structures et dérivent du modèle réduit à l'interface. En considérant une matrice de raideur de sous-structure  $[K]$  partitionnée selon les ddl d'interface  $I$  et les ddl complémentaires  $C$ ,  $[T_r]$  est donnée par la relation (4.29)

$$[T_r] = \begin{bmatrix} -[K_{CC}]^{-1}[K_{CI}] \\ [Id] \end{bmatrix}. \quad (4.29)$$

On définit les modes d'interface comme solutions propres du modèle dans le sous-espace engendré par  $[T_r]$ , avec

$$\left( -\omega_r^2 [T_r]^T [M] [T_r] + [T_r]^T [K] [T_r] \right) \{ \phi_r \} = \{ 0 \}, \quad (4.30)$$

soit

$$\{ q \}_N = [T_r]_{N \times N_I} [\Phi_r]_{N_I \times N_I} \{ \eta_I \}_{N_I}. \quad (4.31)$$

Ayant cette décomposition spectrale, on réalise une troncature en conservant les modes d'interface de pulsation propre  $\omega_r$  faible.

Dans le cas de maillages compatibles, les conditions de couplage sont données par (4.7) et (4.8) avec

$$\{\hat{q}\} = [T_r] [\Phi_r] \{\hat{\eta}_I\}. \quad (4.32)$$

L'équation couplée, faisant maintenant intervenir des ddl d'interface généralisés  $\{\hat{\eta}_I\}$  plutôt que les ddl nominaux  $q_I$  est alors donnée par

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} [Z_{CC}^B] & [\Psi_{Ir}]^T [Z_{IC}^B] & [0] \\ [\Psi_{Ir}]^T [Z_{IC}^B] & [\Psi_{Ir}]^T ([Z_{II}^B] + [Z_{II}^M]) [\Psi_{Ir}] & [\Psi_{Ir}]^T [Z_{IC}^M] \\ [0] & [Z_{CI}^M] [\Psi_{Ir}] & [Z_{CC}^M] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_C^B\} \\ \{\hat{\eta}_I\} \\ \{q_C^M\} \end{Bmatrix} \\ = \begin{Bmatrix} \{f_C^B\} \\ [\Psi_{Ir}]^T (\{f_{I_{ext}}^B\} + \{f_{I_{ext}}^M\}) \\ \{f_C^M\} \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

La vérification des conditions de continuité est équivalente à la construction d'un jeux unique de ddl d'interface généralisés. On est donc amené à utiliser les modes d'interface d'une des sous-structures [38], à calculer les modes d'interface sur un modèle condensé sur l'interface [20] ou à introduire une décomposition spectrale adaptée [13], [14] ou [9]. Une autre approche considérée dans les méthodes de décomposition de domaine est d'obtenir la continuité par un processus itératif [34].

Pour les problèmes de grande taille qui présentent des interfaces étendues, le calcul des modes de contraintes et la projection des matrices de masse et de raideur des sous-structures aux interfaces s'avère très coûteux. Pour accélérer le processus, Bourquin introduit la matrice identité comme opérateur de masse [14], les modes  $[\Phi_r]$  sont alors normés dans  $L^2$ . L'utilisation de cette norme accélère sensiblement le calcul, mais la définition non mécanique des déformations à l'interface oblige à prendre en compte un nombre de modes conséquent. La prise en compte d'une matrice de masse diagonale intégrant la masse totale de la sous-structure rapportée à l'interface (matrice de masse concentrée) permet d'améliorer la représentativité des modes d'interface et d'en réduire le nombre pour l'assemblage du problème complet. Cette approche est notamment proposée par Cros dans [23].

La question de la règle de troncature est importante pour l'utilisation des modes d'interface. La règle empirique de Rubin ne s'applique que si le problème spectral (4.30) utilise une masse physique et il peut être difficile d'assurer la qualité des résultats. Il est possible de mettre en place des indicateurs d'erreur pour enrichir de façon contrôlée une base de modes d'interface [52]. La notion de modes d'interface et l'enrichissement progressif de la base de réduction sont de fait aussi très utiles pour la gestion des maillages incompatibles ([10], [9]).

### 4.3.4 Étude du processus de prédiction

Dans le cadre de la modification structurale, on considère une structure connue expérimentalement. Ceci implique que l'on ne possède qu'une information partielle (aussi bien d'un point de vue spatial que fréquentiel) sur le comportement de la structure. En vue du couplage de la structure de base et de la modification, il convient donc de définir une base d'expansion permettant de reconstruire de la manière la plus efficace possible un déplacement cohérent à l'interface à partir des mesures aux capteurs.

Pour ce faire, on se dote donc d'un modèle local permettant de faire le lien géométrique entre le maillage expérimental et le modèle de la modification, puis on cherche à reconstruire les mouvements à l'interface grâce à une base d'expansion.

#### 1. Construction de la base d'expansion

- Les modes statiques

Pour interpoler les déplacements des ddl instrumentés au niveau des ddl du modèle local (indiqué  $L$ ), il peut sembler naturel d'utiliser les modes statiques correspondant aux capteurs. On considère donc le relèvement statique de forces unitaires appliquées sur les ddl de mesure [3]. La base d'expansion prend alors la forme

$$[T_{Lt}^{stat}] = [K_L]^{-1}[c_{tL}]^T. \quad (4.34)$$

L'expansion sur les modes statiques n'est cependant pas efficace car ils peuvent introduire des déformations très localisées. Ils manquent donc de régularité pour interpoler les déplacements.

- Les modes d'attache associés à l'interface

La base d'expansion qu'on cherche à obtenir doit permettre de reconstruire les déplacements à l'interface en vue du couplage. Corus [16] a donc introduit le modèle éléments finis de la modification dans le modèle local. On considère alors la matrice de raideur  $K_L$  du modèle local incluant la modification <sup>3</sup> et les modes d'attache associés aux ddl de l'interface prennent la forme

$$[T_{Li}^{stat}] = [K_L]^{-1}[c_{iL}]^T. \quad (4.35)$$

On apporte de cette manière une information *a priori* sur les efforts exercés par la modification sur la structure de base.

---

<sup>3</sup>L'indice  $L$  désigne donc dans l'exposé le modèle local incluant la modification.

- Combinaison des bases

En combinant les deux bases introduites ci-dessus, on dispose de la base

$$[T_{L_i^t}^{stat}] = [K_L]^{-1} \begin{bmatrix} [c_{tL}] \\ [c_{iL}] \end{bmatrix}^T, \quad (4.36)$$

comportant une information sur l'effet du couplage, i.e. directement liée aux ddl d'interface, et une autre sur le comportement global de la structure initiale, i.e. répartie sur tous les ddl test et notamment loin de l'interface.

- Les modes d'interface

Les modes d'interface procurent en fait la meilleure base. Comme il a été dit en section 4.3.3, c'est afin d'apporter une certaine régularité à la notion de modes d'attache que l'on résout le problème aux valeurs propres

$$(-\omega_{i_g}^2 [T_{L_i^t}^{stat}]^T [M_L] [T_{L_i^t}^{stat}] + [T_{L_i^t}^{stat}]^T [K_L] [T_{L_i^t}^{stat}]) \{\phi_{i_g}^t\} = \{0\}. \quad (4.37)$$

On obtient alors la base d'expansion

$$[T_{Lg}] = [T_{L_i^t}^{stat}] [\{\phi_{i_g}^1\} \dots \{\phi_{i_g}^{N_g}\}], \quad (4.38)$$

qui présente des caractéristiques de régularité en termes de fréquences associées au modèle local condensé et donc en adéquation avec la bande de fréquences considérée.

## 2. Expansion des données expérimentales

Une fois la base d'expansion construite, on minimise la distance euclidienne entre les données mesurées et l'observation du champ de déplacement

$$\{\eta_{red}\} = \underset{\eta}{ArgMin} (\| \{q_{test}\} - [c_{tL}] [T_{Lg}] \{\eta\} \|^2) \quad (4.39)$$

où  $[c_{tL}]$  est l'opérateur de sélection des ddl de mesure parmi les ddl du modèle local. La minimisation de cette fonctionnelle conduit à une base d'expansion  $[T_{gt}^{exp}]$ , telle que l'on dispose désormais d'une reconstruction des ddl de test sur l'ensemble du modèle local

$$\{q_L\} = [T_{Lg}] [T_{gt}^{exp}] \{q_{test}\} = [T_{Lt}^{exp}] \{q_{test}\}. \quad (4.40)$$

Par construction on dispose donc des déformées reconstruites à l'interface

$$[\phi_I] = [c_{IL}] [T_{Lt}^{exp}] [\phi_{test}]. \quad (4.41)$$

### 3. Assemblage

À partir des déformées de la structure de base reconstruites à l'interface, la formulation additive du couplage de la section 4.1.4 donne l'équation assemblée

$$[Z^{B+M}] \begin{Bmatrix} \eta_g^B \\ q_C^M \end{Bmatrix} = 0 \quad (4.42)$$

avec

$$[Z^{B+M}] = \begin{bmatrix} \left( -\omega^2 [Id] + [\Omega^B]^2 \right) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

$$+ \begin{bmatrix} [\phi_I^B]^T [Z_{II}^M] [\phi_I^B] & [\phi_I^B]^T [Z_{IC}^M] \\ [Z_{CI}^M] [\phi_I^B] & [Z_{CC}^M] \end{bmatrix}.$$

### 4. Aide au choix de la base d'expansion optimale

On ne sait pas choisir la taille de  $[T_{Lg}]$  (4.38) *a priori*. Les vecteurs constituant la base, solutions d'un problème aux valeurs propres, sont rangés en terme de régularité au sens des fréquences associées au modèle local condensé et la troncature de la base influence beaucoup le résultat de prédiction. La minimisation d'une fonctionnelle basée sur l'écart entre deux méthodes différentes de reconstruction de l'interface va permettre de désigner une solution qui réalise le meilleur compromis entre précision et régularité. Dans [16] sont introduits des indicateurs d'erreur énergétiques estimant l'écart entre les déplacements à l'interface prédits, reconstruits sur une base de modes statiques  $[q_I^{stat}]$  d'une part, et ceux reconstruits sur une base de modes dynamiques  $[q_I^{LMME}]$  d'autre part. Ils sont une aide précieuse au choix de la taille de la base d'expansion  $[T_{Lg}]$  à considérer pour la prédiction de tel ou tel mode.

Soit les modes prédits  $[\phi^{coupl}]$ , solutions du problèmes aux valeurs propres (4.42), définis sur les ddl généralisés de la structure initiale d'une part, et les ddl physiques complémentaires de l'interface de la structure modificatrice  $\{q_C^M\}$  d'autre



part. On sélectionne la partition associée aux ddl généralisés  $\{\eta_g^B\}$  de la structure de base grâce à l'opérateur  $[c_{\eta_g^B}]$ .

On définit alors

$$\{q_I^{LMME}\} = [\phi_I] \left( [c_{\eta_g^B}] [\phi^{coupl}] \{\eta^{coupl}\} \right) \quad (4.44)$$

qui représente le mouvement à l'interface du système couplé.

Il s'agit désormais de reconstruire des déplacements de l'interface de manière très différente pour que l'écart avec  $q_I^{LMME}$  puisse avoir une valeur significative. On considère donc la partition des modes prédits sur le maillage capteurs

$$[\phi_t^{coupl}] = [\phi_{test}] \left( [C_{\eta_g^B}] [\phi^{coupl}] \right), \quad (4.45)$$

et la base d'expansion statique

$$[T_{LBt}^{stat}] = [K_{LB}]^{-1} [c_{tLB}]^T, \quad (4.46)$$

construite à partir de l'équation 4.34 mais avec un modèle local **ne prenant pas en compte la modification**. La base  $[\phi_t^{coupl}]$  est ensuite étendue sur  $[T_{LBt}^{stat}]$ . On peut alors construire par minimisation

$$\{\eta^{stat}\} = \underset{\eta}{ArgMin} \left( \left\| \{q_t^{coupl}\} - [c_{tL}][T_{LBt}^{stat}] \{\eta\} \right\|^2 \right) \quad (4.47)$$

et on définit enfin

$$\{q_I^{stat}\} = [c_{iL}] [T_{LBt}^{stat}] \{\eta^{stat}\} \quad (4.48)$$

Une fois  $\{q_I^{LMME}\}$  et  $\{q_I^{stat}\}$  construits, on définit les indicateurs en énergie de déformation

$$(\Delta_{EK})_i = \frac{\left\| \{q_I^{LMME}\}_i - \{q_I^{stat}\}_i \right\|_{KM}^2}{\left\| \{q_I^{LMME}\}_i \right\|_{KM}^2 + \left\| \{q_I^{stat}\}_i \right\|_{KM}^2} \quad (4.49)$$

et en énergie cinétique

$$(\Delta_{E_M})_i = \frac{\|\{q_I^{LMME}\}_i - \{q_I^{stat}\}_i\|_{M^M}^2}{\|\{q_I^{LMME}\}_i\|_{M^M}^2 + \|\{q_I^{stat}\}_i\|_{M^M}^2}. \quad (4.50)$$

$K^M$  et  $M^M$  sont respectivement les matrices de raideur et de masse du modèle de la modification condensé statiquement sur l'interface. La normalisation en masse d'une part et en raideur d'autre part permet de disposer de deux indicateurs au comportement différent. La méthode *statique* utilise une expansion statique sur les ddl du maillage expérimental. Les modes statiques donnent à la solution une grande précision sur les ddl considérés. En revanche la régularité de la solution n'est pas assurée. La méthode *dynamique*, quant à elle, procure à la solution une certaine régularité, mais est beaucoup moins précise au niveau des ddl du maillage.

### 4.3.5 Proposition de mise en œuvre industrielle

La surveillance continue des installations permet de détecter la plupart des problèmes vibratoires dans des phases préliminaires. Sans action adaptée, l'évolution de telles situations peut provoquer l'arrêt de l'exploitation et avoir des répercussions économiques importantes.

Lorsqu'un problème est détecté, des mesures exploratoires permettent en général un diagnostic de la structure et la détermination de l'origine du problème. À l'issue de ce diagnostic, on propose un traitement correctif. Il s'agit alors de prédire son effet de la manière la plus précise possible.

La méthode de modification structurale LMME est le fruit d'une succession d'étapes qu'il convient de réaliser avec soin.

1. À partir de quelques capteurs de contrôle, les unités de production peuvent surveiller le niveau vibratoire de leur installation. En cas de dépassement du seuil d'alerte, des actions s'engagent. Des mesures en fonctionnement et une analyse modale sont en général réalisées.
2. Un modèle grossier de la structure est construit à partir des mesures géométriques accessibles de celle-ci. Si l'on prend l'exemple d'un moteur en service, les cotes extérieures du carter pourront être connues ; en revanche, la géométrie de l'intérieur est généralement mal connue. On essaiera cependant de fournir un modèle avec des caractéristiques en masse aussi réalistes que possible. Ce modèle est un support géométrique qui permet de faire un lien entre les ddl de mesure et les ddl d'interface. Il fournit également une classe de déplacements compatibles avec la structure réelle.

3. Un recalage rapide « à la main » de quelques paramètres de modélisation est pratiqué pour s'approcher au mieux des caractéristiques fréquentielles de la structure.
4. La conception de la modification peut commencer. Une étude de conception réalisée à partir de ce modèle permet de se familiariser avec le problème.
5. Une fois la modification conçue, la méthode de prédiction (section 4.3.4) est mise en œuvre.  
Des indicateurs d'erreur permettent de cibler les tailles potentielles de la base d'expansion. Il ne s'agit que d'une aide au choix qui sera fait après. Il faut en effet voir si les tailles de base désignées correspondent à une zone stable d'un point de vue de la prédiction. Cependant le point essentiel de la prédiction est l'examen des déformées prédites. Il permet d'éliminer les déformées suspectes et d'affiner le choix de la taille optimale de la base d'expansion.
6. La dernière étape concerne la synthèse de réponses vibratoires à partir des modes prédits et la comparaison avec les mesures de la structure non modifiée.

# Chapitre 5

## Utilisation d'une méthode de modification structurale pour la conception d'un dispositif amortissant original

La méthode LMME [16] (section 4.3) a été développée, à l'origine, pour des cas de modifications en masse ou en raideur [16]. La section 5.1 présente les évolutions de la méthode pour son application à des cas amortis.

Les sections suivantes 5.2 et 5.3 sont deux exemples d'applications numériques. Le premier présente la prédiction de l'effet d'un raidisseur sur une structure faiblement amortie. Ce cas d'application permet en outre de vérifier que dans un cas faiblement amorti, la méthode LMME initialement proposée dans [16] appliquée dans le cadre de la MSE [78] (2.1.2) permet de traiter ce cas. On compare les résultats obtenus par l'application de la méthode LMME étendue. Le second reprend le démonstrateur introduit au chapitre 3 et présente la prédiction de l'effet d'une modification très amortie sur une structure relativement complexe.

À partir de ce deuxième exemple, une étude de robustesse de la méthode LMME amortie est présentée en section 5.4, puis la section 5.5 donne les spécificités de l'utilisation de la méthode LMME dans des cas dont le comportement dépend de la fréquence.

La section 5.6 présente enfin la validation expérimentale de la prédiction de l'effet de la modification du démonstrateur.

### 5.1 Les évolutions de la méthode LMME

La méthode LMME a été développée dans le but de prévoir l'effet de modifications structurales sur une structure en crise vibratoire. L'ajout de masses et (plus souvent) de raidisseurs résout une large gamme de problèmes vibratoires. Lorsqu'une raie excitatrice particulière est mise en cause, ce genre de modifications est susceptible de

décaler en fréquence les pics de résonance, et plus particulièrement celui associé au mode excité. Cependant ce décalage en fréquence est réservé à des cas de densité spectrale faible. Dans le cas contraire, le décalage du pic de résonance incriminé risque en effet d'être accompagné du décalage de modes voisins, et d'entraîner une modification du problème vibratoire et non de le résoudre.

Ce type de modification est de plus réservé à des problèmes provoqués par une excitation de type « raie », pour effectivement être en mesure de proposer une modification capable d'éloigner suffisamment en fréquence le mode impliqué de la raie excitatrice. Pour des densités spectrales importantes ou des excitations « large bande », une diminution globale du niveau vibratoire est une solution plus appropriée.

Ceci correspond à un lissage des pics de résonance, i.e. une augmentation de l'amortissement. Pouvoir prédire l'effet de dispositifs dissipatifs sur une structure est donc un objectif intéressant pour de nombreuses applications.

L'introduction de termes d'amortissement dans la méthode de prédiction nécessite d'étudier les différentes étapes du processus et éventuellement de proposer des évolutions.

La première étape de la méthode est la construction d'un modèle local. Le modèle local étant principalement un support géométrique de l'interface entre la structure initiale et le modèle de la modification, la prise en compte d'un éventuel terme d'amortissement n'est pas nécessaire.

La seconde étape est la construction d'une base d'expansion permettant la reconstruction des données expérimentales sur les ddl d'interface pour pouvoir réaliser le couplage. Sa construction est réalisée à partir de modes statiques puis de l'analyse du modèle local réduit sur la base composée de ces modes. Du fait de l'utilisation de modes statiques dans la construction des modes d'interface, la prise en compte éventuelle d'un terme d'amortissement ne modifierait que très peu l'espace vectoriel représenté par la base des modes d'interface.

Les termes d'amortissement de la structure initiale comme ceux de la modification interviennent au final uniquement dans l'écriture de l'équation de couplage. Les données de l'identification de la structure de base sont exploitées sous la forme (4.5).

La matrice de rigidité dynamique  $[Z^M]$  de la modification est, quant à elle, constituée, outre les matrices de masse et de raideur, d'une matrice d'amortissement. Ainsi l'équation de couplage s'écrit

$$\begin{aligned}
 [Z^{B+M}] = & \begin{bmatrix} \left( -\omega^2 [Id] + j\omega [\Gamma^B] + [\Omega^B]^2 \right) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} [\phi_I^B]^T [Z_{II}^M] [\phi_I^B] & [\phi_I^B]^T [Z_{IC}^M] \\ [Z_{CI}^M] [\phi_I^B] & [Z_{CC}^M] \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Dans les cas d'étude de la thèse, seuls des amortissements hystérétiques correspondant à des représentations de matériaux viscoélastiques ont été considérés. Cependant les développements proposés peuvent être étendus à d'autres types d'amortissement.

En ce qui concerne le choix de la taille de la base d'expansion, il est nécessaire de réaliser un certain nombre de fois le calcul de prédiction en augmentant à chaque itération la taille de la base d'expansion  $[T_{Lg}]$  (4.38). Il est de ce fait intéressant d'utiliser un modèle réduit de la modification pour diminuer les temps de calcul.

Une fois les étapes de la méthode LMME réalisées, il faut se questionner sur la manière de prédire les niveaux vibratoires en fonctionnement.

La solution de reconstruction de réponses fréquentielles la plus simple pour des systèmes dépendant de la fréquence consiste en l'assemblage des matrices caractéristiques pour une fréquence donnée, à séparer les termes dépendant de la fréquence de ceux indépendants (section 2.1.1) et à calculer l'expression

$$H(s) = c [Z(s)]^{-1} b. \quad (5.2)$$

Dans le cadre de la méthode LMME de modification structurale (ou de toute autre méthode modale), on ne dispose cependant pas des matrices caractéristiques, mais on définit une famille de modes complexes calculés pour des valeurs de module (définissant le comportement) associées à leur fréquence propre. Puis on réalise la synthèse modale sous la forme (2.22)

$$H(s) = \sum_{j=1}^N \frac{\{c\psi_j\}\{\psi_j^T b\}}{\alpha_j(s - \lambda_j)} + \frac{\{c\bar{\psi}_j\}\{\bar{\psi}_j^T b\}}{\bar{\alpha}_j(s - \bar{\lambda}_j)}. \quad (5.3)$$

On a vu, à la section 2.1.3, puis sur l'exemple de la section 2.2.2, que l'erreur commise sur la synthèse modale dans ce contexte peut être négligée si la dépendance du comportement par rapport à la fréquence n'est pas trop grande. La section 5.3 permettra de vérifier, sur un exemple numérique réaliste, que cette caractéristique particulière de dépendance par rapport à la fréquence a peu d'influence sur la synthèse modale.

## 5.2 Un premier exemple

La méthode LMME telle qu'elle est décrite dans [16] ne permet pas de prédire l'amortissement de la structure couplée alors que cette information (mesurée sur la structure initiale) peut s'avérer nécessaire pour la prédiction des niveaux vibratoires de la structure modifiée en fonctionnement. En effet la modification apportée peut modifier l'amortissement présent initialement. Dans le cas de l'ajout d'un raidisseur,

la modification peut avoir tendance à détériorer l'amortissement, et on peut alors se trouver confronté à des cas où le raidisseur décale le pic de résonance visé mais où le niveau vibratoire augmente globalement.

En règle général, il sera toujours intéressant de pouvoir prédire l'amortissement même pour des structures faiblement amorties et des ajouts de raidisseurs.

Le cadre de cette section est la présence d'un amortissement relativement faible pour la structure initiale comme pour la structure modifiée.

L'utilisation des modes normaux dans un premier temps doit permettre l'application de la méthode de prédiction et la détermination des fréquences propres et des déformées du système couplé. À partir de ces prédictions, on se demande s'il est possible de reconstruire l'amortissement du système couplé.

On se place ici dans le cadre de la MSE (Modal Strain Energy [78]). L'hypothèse selon laquelle les modes normaux ne sont pas couplés, i.e. l'amortissement considéré est faible, est donc pré-requise.

Ainsi en considérant les contributions dissipatives du système, la méthode MSE donne une expression  $\xi_j^{coupl}$  approchée des coefficients d'amortissement de la structure couplée en fonction des modes normaux de la structure couplée  $[\phi_j^{coupl}]$ , des coefficients d'amortissement modaux identifiés de la structure initiale  $[\Gamma^B]$ , des matrices d'amortissement de la modification  $C^M$  et  $B^M$ , et de la masse généralisée  $\mu_j = \left\{ \phi_j^{coupl} \right\}^T [M] \left\{ \phi_j^{coupl} \right\}$ . Ces amortissements sont de la forme

$$\xi_j^{coupl} \approx \frac{1}{2} \frac{\left[ \phi_j^{coupl} \right]^T \left( \begin{bmatrix} \Gamma^B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_I^B & 0 \\ 0 & Id \end{bmatrix}^T \left( C^M + \frac{B^M}{\omega_j^{coupl}} \right) \begin{bmatrix} \phi_I^B & 0 \\ 0 & Id \end{bmatrix} \right) \left[ \phi_j^{coupl} \right]}{\mu_j \omega_j^{coupl}} \quad (5.4)$$

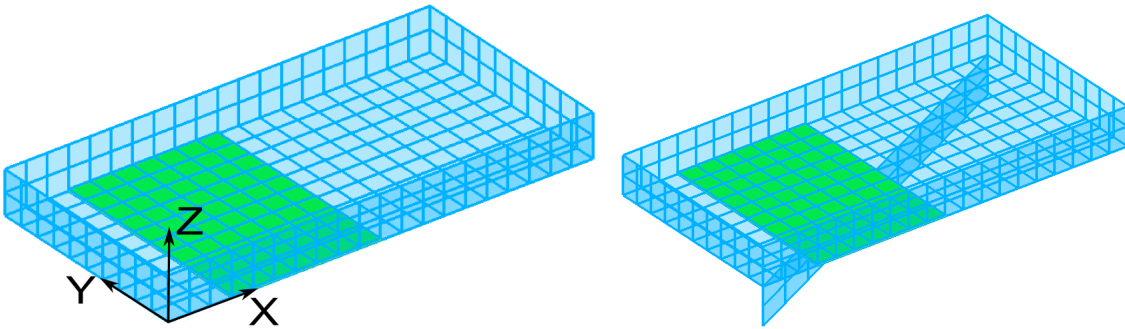


FIG. 5.1 – Modèle de bac avec couche amortissante avant et après modification (ajout d'un raidisseur).

Afin de tester numériquement ces expressions, on se donne un cas test. Il s'agit d'un bac modélisé sur la figure 5.1. Une couche de matériau viscoélastique contrainte localisée sur une partie du fond du bac introduit de l'amortissement dans la structure. Un raidisseur est ajouté sous le bac sur une des diagonales.

	bac (acier)	couche viscoélastique	couche contrai- gnante (acier)	raidisseur (acier)
longueur	60cm	21cm	21cm	67cm
largeur	30cm	30cm	30cm	×
épaisseur	2mm	0,5mm	2mm	2mm
hauteur	6cm	×	×	6cm

TAB. 5.1 – Dimensions du cas test

Les dimensions du bac et de la modification (raidisseur) sont données dans le tableau 5.1. On considère la structure encastree sur le bord en  $X = 0$  (figure 5.1).

On compare le calcul direct et les différentes méthodes à disposition :

1. la méthode proposée dans [16] utilisée avec le cadre de la MSE (section 2.1.2).
2. la méthode étendue au cas dissipatif.

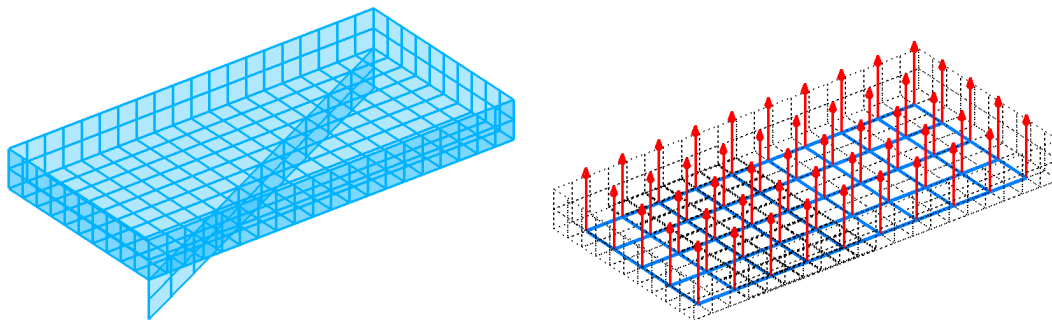


FIG. 5.2 – Modèle local et maillage capteurs utilisés pour l'application des méthodes de prédiction.

Le modèle local et le maillage capteurs utilisés pour mettre en œuvre les méthodes de prédiction sont présentés en figure 5.2. On considère donc un modèle local ne prenant pas en compte la couche viscoélastique contrainte. Le maillage capteurs est composé de 50 capteurs verticaux.

Le tableau 5.2 donne les caractéristiques modales de la structure avant et après modification. On voit que la prédiction des fréquences est de qualité équivalente que



N° mode	$f$ (Hz)				$\xi$ (%)			
	avant	après			avant	après		
		direct	1	2		direct	1	2
1	71,8	88,00	85,86	86,13	3	0,86	0,81	0,86
2	114,2	133,24	129,80	129,89	2,1	0,85	0,99	0,89
3	134,1	185,16	180,25	180,37	0,7	1,77	1,65	1,70

TAB. 5.2 – Fréquences et amortissements modaux selon différentes méthodes

l'on choisisse d'utiliser les modes normaux ou les modes complexes avec un très léger avantage pour la méthode 2. En ce qui concerne les amortissements modaux, les relations développées précédemment associées à la méthode 1 permettent de donner une bonne approximation. Cependant la méthode 2 améliore ces prédictions.

La méthode proposée dans [16] permet de prédire les fréquences propres et les déformées modales lorsqu'on applique une modification sur une structure peu amortie. Cependant la prédiction de l'amortissement de la structure modifiée peut être un point intéressant à maîtriser dans la mesure où la modification en raideur pourrait dégrader l'amortissement initialement présent de manière à amoindrir l'effet positif de la modification.

Les relations proposées dans cette section ont été écrites en vue de prédire l'amortissement à partir des résultats de prédiction obtenus par la méthode de Corus ([16]). Le cas test de cette section montre que ces relations permettent de fournir une prédiction satisfaisante du moins dans des cas où les hypothèses de la méthode MSE sont respectées. La prédiction de l'amortissement par la méthode LMME étendue améliore sensiblement les prédictions.

### 5.3 Un exemple plus complexe

Dans cette section, le démonstrateur du chapitre 3 est considéré et on étudie la qualité de la méthode de prédiction LMME dans un cas très amorti. On compare à nouveau la méthode de modification structurale LMME à laquelle on ajoute les hypothèses de la MSE et la méthode LMME étendue. Le fait d'étudier un cas très amorti éloigne évidemment le problème des hypothèses de la MSE. On illustre ici la capacité de la méthode étendue à traiter les cas de modification structurale très amortie.

L'obtention des résultats présentés dans cette section est le fruit d'un certain nombre de choix concernant le maillage capteur, le modèle local ou la taille de la base d'expansion. La section 5.4 présente une étude des différents choix à réaliser pour obtenir cette prédiction.

On choisit le modèle local le plus représentatif. Il s'agit du modèle complet lui-même (figure 5.3 (a)). Cela nous permet de tester la méthode sans considérer les erreurs de modélisation.

De plus, on choisit ici de considérer un comportement indépendant de la fréquence pour simplifier l'étude numérique de la méthode basée sur ce cas test, présentée en section 5.4.

Le maillage capteur utilisé est le maillage défini sur la figure 5.3 (b). On choisit de considérer des mesures non bruitées pour évaluer la méthode propre. La bande de fréquence considérée s'étend jusqu'à  $200Hz$ . On dispose ainsi des modes d'ovalisation à 4 lobes.

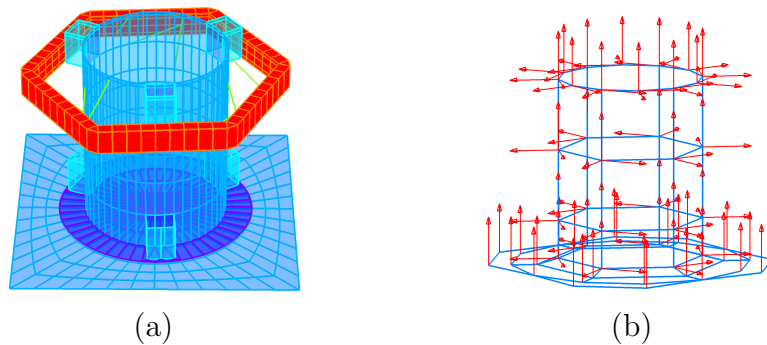


FIG. 5.3 – Modèle local considéré et configuration capteurs utilisée pour l'application de la méthode LMME.

Les tableaux 5.3 et 5.4 donnent les valeurs des fréquences propres et des amortissements modaux des 16 premiers modes de la structure (calculés numériquement) et les valeurs de prédiction issues de la méthode LMME classique à laquelle on juxtapose les relations données par les hypothèses de la MSE, d'une part, et de la méthode LMME étendue aux cas dissipatifs.

Le premier considère une raideur de tirant  $k = 5,3 \cdot 10^5 Pa$  et un facteur de perte  $\eta = 0,54$ , pour le second  $k = 7,4 \cdot 10^5 Pa$  et un facteur de perte  $\eta = 0,75$ .

N° mode	$f$ (Hz)			$\xi$ (%)		
	référence	X-SDM	SDM+MSE	référence	X-SDM	SDM+MSE
1	14.0	14.0	13.9	0.9	0.9	1.0
2	16.8	16.7	16.4	2.8	2.7	3.8
3	18.3	18.2	18.1	1.6	1.5	2.0
4	24.4	24.5	23.1	20.5	20.6	22.3
5	33.8	33.4	32.0	10.5	10.4	13.2
6	35.3	35.1	33.3	15.1	15.0	17.2
7	43.2	44.1	42.2	18.0	19.0	20.3
8	46.4	46.3	43.5	18.7	18.3	20.6
9	50.3	51.6	49.8	15.1	16.4	17.7
10	60.3	61.1	59.7	12.6	13.3	13.8
11	68.0	69.0	65.8	18.1	18.3	18.7
12	73.4	73.4	73.6	1.0	1.1	1.4
13	92.9	93.0	93.1	1.1	1.2	1.3
14	101.0	101.1	101.0	1.2	1.3	1.4
15	104.2	104.3	104.1	1.9	2.0	2.0
16	110.7	110.5	110.7	4.3	4.4	4.3

TAB. 5.3 – Fréquences et amortissements modaux du modèle numérique par assemblage des matrices d'une part (référence) et par les méthodes LMME avec les hypothèses de la MSE et la méthode LMME étendue (X-LMME) d'autre part.  $k = 5, 3.10^5 Pa$  et  $\eta = 0, 54$ .

Chacune des méthodes de prédiction fournit de bons résultats concernant les fréquences propres. En revanche, la prédiction de l'amortissement est largement meilleure avec la méthode LMME étendue (X-SDM).

N° mode	$f$ (Hz)			$\xi$ (%)		
	référence	X-SDM	SDM+MSE	référence	X-SDM	SDM+MSE
1	14.0	14.0	14.0	0.8	0.8	1.0
2	17.0	16.9	16.7	2.2	2.1	3.1
3	18.5	18.4	18.3	1.3	1.3	1.8
4	29.5	29.7	26.4	24.7	24.8	29.3
5	36.2	35.6	34.2	10.3	10.6	14.7
6	39.9	39.5	36.7	16.5	16.7	21.2
7	51.0	52.4	47.6	23.1	24.7	28.7
8	54.8	54.3	49.1	20.9	20.3	26.0
9	57.6	58.9	54.4	19.9	20.4	23.6
10	68.2	69.4	64.9	18.5	18.8	19.4
11	73.2	73.0	72.9	1.4	1.7	11.4
12	81.1	83.7	76.1	22.8	23.5	17.8
13	92.9	92.8	93.8	1.9	2.0	2.7
14	101.5	101.6	101.5	1.6	1.7	2.0
15	105.4	105.3	105.2	2.9	3.0	3.2
16	114.2	114.0	114.0	8.1	8.7	8.4

TAB. 5.4 – Fréquences et amortissements modaux du modèle numérique par assemblage des matrices d’une part (référence) et par les méthodes LMME avec les hypothèses de la MSE et la méthode LMME étendue (X-LMME) d’autre part.  $k = 7, 4.10^5 Pa$  et  $\eta = 0,75$ .

Pour le cas présenté sur le tableau 5.4, les écarts de prédiction de l’amortissement sont encore plus élevés. Le fait d’utiliser un facteur de perte plus élevé que dans le cas précédent écarte encore plus le cas du cadre défini par les hypothèses de la MSE. Certaines prédictions d’amortissement sont totalement erronées (modes 11 et 12, par exemple).

On voit ainsi nettement que, dans un cas de modification très amortie, le cadre de la MSE est dépassé et que les résultats de prédiction notamment de l’amortissement ne sont pas bons. En revanche la méthode étendue aux cas dissipatifs permet de fournir des résultats de prédiction largement satisfaisants.

La figure 5.4 donne les formes de quelques modes de la structure modifiée qui seront exploités pour illustrer l’étude numérique de la méthode étendue en section 5.4.

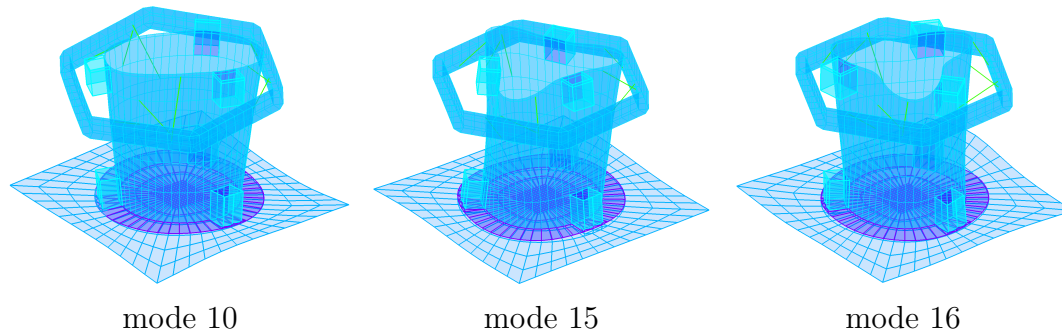


FIG. 5.4 – Quelques modes de la structure modifiée obtenus avec  $k = 5,3 \cdot 10^5 Pa$  et  $\eta = 0,54$ .

## 5.4 Robustesse de la méthode LMME amortie

Les évolutions de la méthode LMME proposées à la section 5.1 nécessitent l'étude des différentes étapes de la méthode. L'objet de ce chapitre est donc l'étude numérique de la méthode étendue à des cas dissipatifs. Pour réaliser cette étude, on se donne le modèle de la section 5.3.

On s'intéresse ensuite aux différentes étapes du processus de prédiction, l'influence du maillage capteurs, du modèle local, de la base d'expansion. Pour cette étude, on considère un comportement indépendant de la fréquence.

### 5.4.1 Choix du maillage capteurs

La configuration capteurs définit les points auxquels l'information sera la plus juste. L'expansion réalisée lors de l'application de la méthode LMME permet de reconstruire des déformées à l'interface à partir notamment de ces données d'essais. Pour estimer l'impact que peut avoir le choix d'une configuration particulière sur le processus de prédiction, on se donne plusieurs configurations. La figure 5.5 montre les différentes configurations testées.

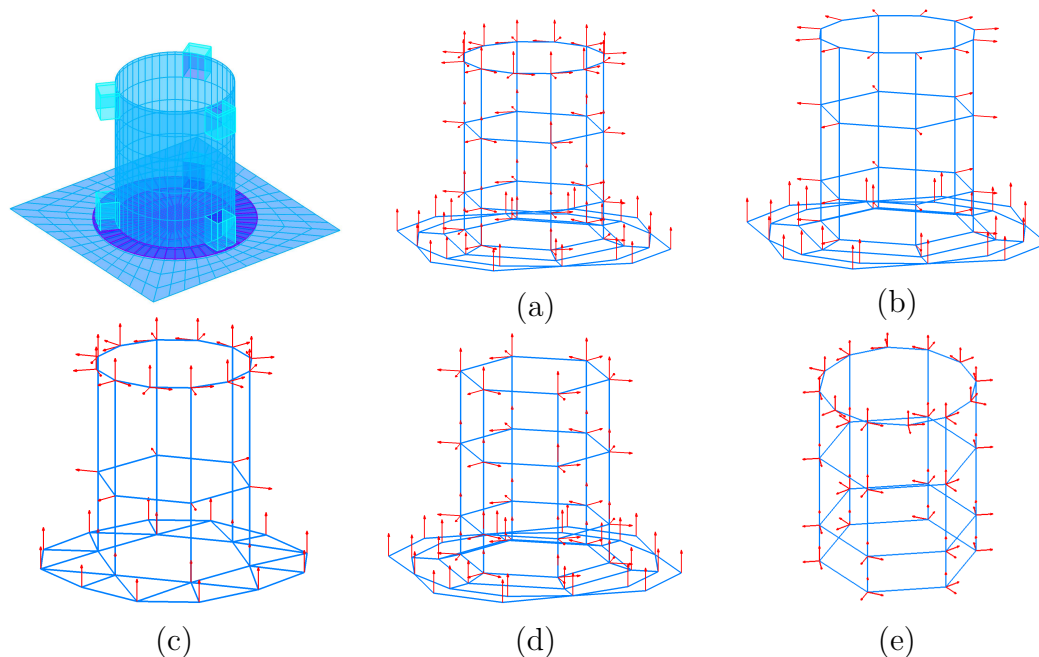


FIG. 5.5 – Le modèle local et les différentes configurations capteurs étudiées.

La configuration (a) comporte 116 capteurs, des mesures tri-axiales sur le cylindre et normales sur la plaque. Cette configuration est très dense. Elle permet de réaliser une identification modale de bonne qualité sur la gamme de fréquence considérée (identification jusqu'à 200 Hz). La plaque et le cylindre sont très instrumentés pour avoir une observation optimale de tous les mouvements.

La configuration (b) comporte 56 capteurs. On ne dispose que de mesures normales au cylindre et à la plaque. On cherche ici à obtenir des informations globales sur la structure sans présupposer la position de la modification. Trois couronnes sont instrumentées dans la hauteur du cylindre, avec un raffinement particulier sur la plus haute, comme dans le cas de la configuration (a). C'est la configuration la plus réaliste à envisager dans le cadre d'un premier essai sur site.

La configuration (c) comporte 60 capteurs. Les mesures sont plutôt concentrées autour de l'interface. Dans cette zone, des mesures tri-axiales sont considérées. Ailleurs la densité de mesures est moindre en comparaison des configurations (a) et (b). En particulier, seules deux couronnes sont instrumentées dans la hauteur. Les mouvements globaux seront donc probablement moins bien estimés que dans la configuration (b), mais on attend une information de meilleure qualité autour de la plus haute des couronnes. L'identification est bonne qualité, notamment pour les modes d'ovalisation, qui impactent principalement le haut du cylindre.

La configuration (d) comporte 98 capteurs. Elle est très proche de la configuration (a). La différence vient de la couronne supérieure qui ne comporte, dans la configuration

(d), que 6 capteurs tri-axiaux contre 12 dans la configuration (a) ou (c). Du fait de cette observation très réduite, l'identification des modes d'ovalisation à 3 lobes est rendue très difficile et celle des modes à 4 lobes impossible.

La configuration (e) comporte 90 capteurs. L'instrumentation du cylindre est la même que pour la configuration (a). Les capteurs de la plaque ont été supprimés. Cette configuration permet d'observer les modes d'ovalisation, mais pas les modes de la plaque.

La configuration (a) fait office de configuration de référence pour un essai en laboratoire. Les configurations (b) et (c) disposent d'un nombre de mesures quasiment identique. La configuration (c) fait le choix de concentrer l'information donnée par la mesure dans la zone de l'interface, présupposant la connaissance de la modification à venir. La configuration (b) ne fait aucune hypothèse sur la position de la modification et ne privilégie donc aucune zone. La configuration (d) comporte un nombre important de capteurs, répartis très uniformément, mais pas forcément de manière judicieuse. Aucune hypothèse n'est faite sur la position de la modification et la configuration limite l'identification. La configuration (e) concentre un nombre important de capteurs dans une zone particulière (le cylindre) et ne permet pas d'observer la forme globale des modes.

Pour juger de la pertinence des différentes configurations capteurs, deux résultats sont présentés. Dans un premier temps, on s'intéresse à la prédiction d'un mode à deux lobes. Toutes les configurations permettent d'observer de manière raisonnable ce type de mode, on s'attend donc à obtenir des résultats de qualité équivalente. Dans un second temps, on analysera les résultats de prédiction dans le cas d'un mode à trois lobes. La configuration (d) devrait montrer ses limites, là où les autres configurations doivent fournir une prédiction correcte, puisque ce mode est bien observé.

La figure 5.6 présente les résultats de prédiction pour le mode 10, mode d'ovalisation à 2 lobes très amorti.

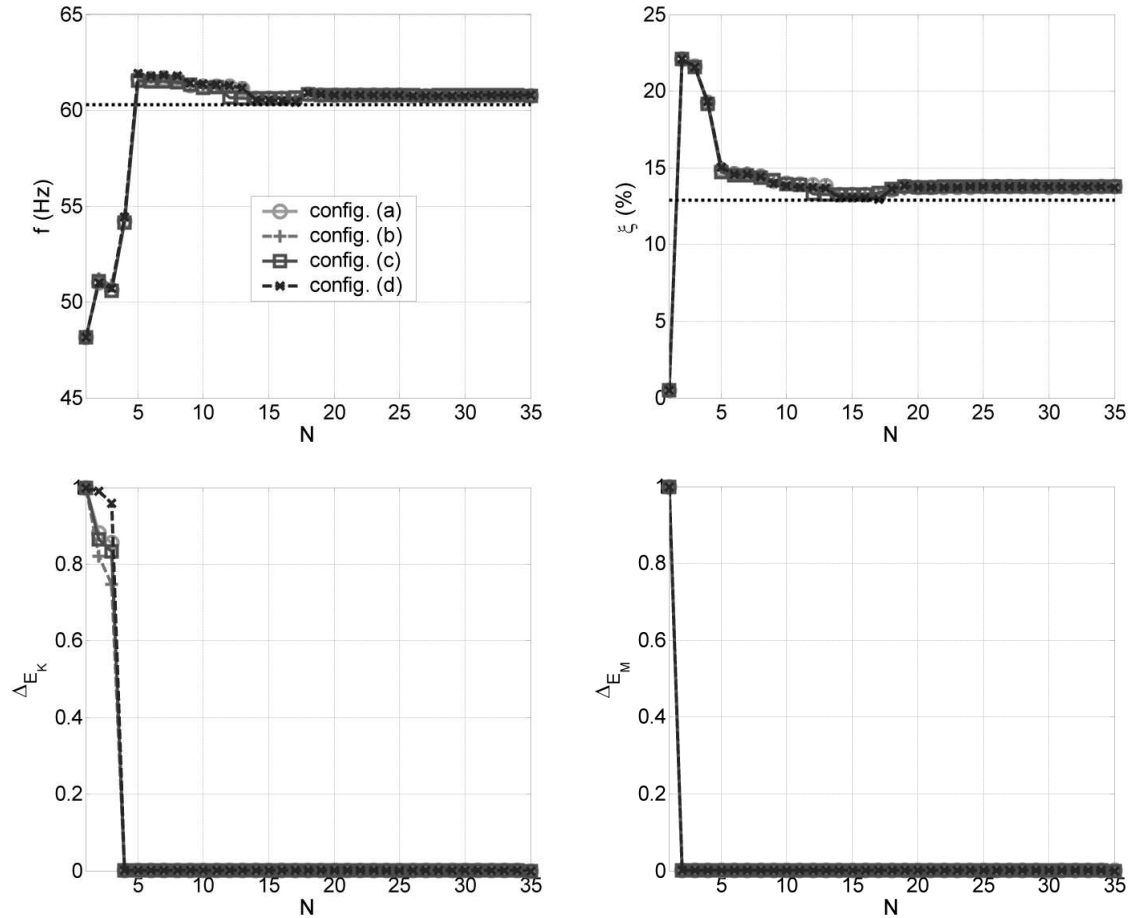


FIG. 5.6 – Évolution des valeurs de prédiction du mode 10 selon la taille de la base d'expansion pour différents maillages capteurs.

On voit que pour la prédiction d'un mode d'ovalisation à 2 lobes, les 4 premières configurations fournissent des résultats équivalents, de qualité raisonnable, tant pour la fréquence que pour l'amortissement. Les écarts de prédiction sont infimes. Le processus d'expansion fournit des bases très proches pour chaque configuration et les évolutions des paramètres sont quasiment identiques. Les valeurs de prédiction des différentes configurations convergent d'ailleurs vers les mêmes valeurs pour une taille de base d'expansion supérieure à 14 vecteurs. Pour une taille de base plus faible, la configuration (c) possède un très léger avantage par rapport aux autres configurations. L'information de couplage est localisée dans la partie supérieure du cylindre et la configuration (c) a en effet une densité capteurs plus importante dans cette zone.

La figure 5.7 présente les résultats pour la prédiction du mode 16, un mode d'ovalisation à 3 lobes, avec les configurations (c) et (e).



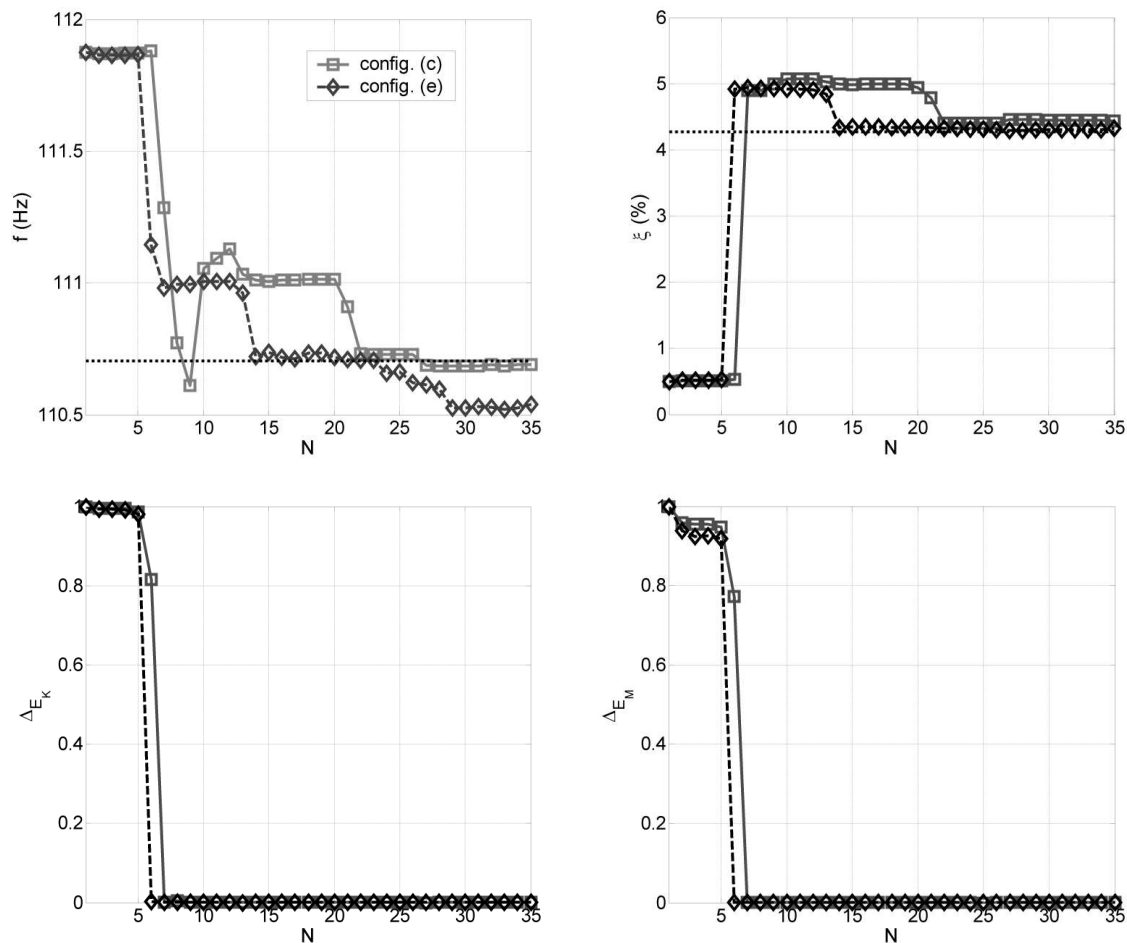


FIG. 5.7 – Évolution des valeurs de prédiction du mode 16 selon la taille de la base d'expansion pour différents maillages capteurs.

Les valeurs de prédiction sont très bonnes quelque soit la configuration capteurs. On observe cependant une dérive de la fréquence prédite pour la configuration (e), avec une taille de base supérieure à 23 vecteurs. Les phases de stabilisation des indicateurs de régularité à l'interface (IERI) interviennent avec un léger décalage. Les IERI associés à la configuration (e) se stabilisent en effet pour une taille de base plus faible. La configuration capteurs ne permet pas d'observer les mouvements de la plaque et les formes d'ovalisation apparaissent plus tôt dans la base d'expansion que pour la configuration (c).

La non observation des mouvements de la plaque par la configuration (e) est pénalisante pour la forme globale du mode reconstruit. La figure 5.8 donne l'évolution de la valeur du MAC calculé entre les déformées reconstruites pour les configurations (c) et (e) et celle du mode 16 de référence. Le résultat de prédiction est raisonnable

dans les deux configurations. Cependant la configuration (e) permet d'atteindre un MAC de 0,92 alors que la configuration (c) donne un MAC de 0,99. L'écart est très faible mais illustre le fait que, même avec un modèle local exact (le modèle local est le modèle de référence), la reconstruction exacte du mode n'est pas possible avec la configuration (e).

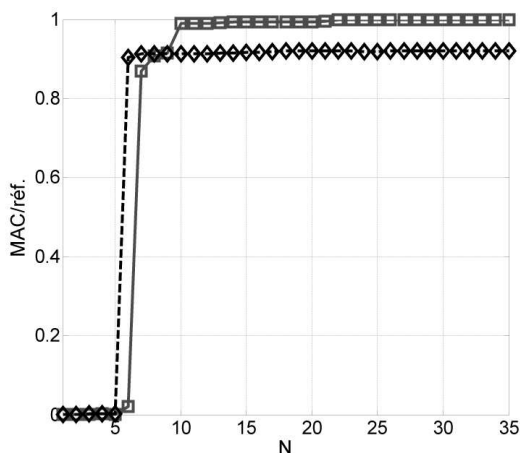


FIG. 5.8 – Évolution de la prédiction de la forme du mode 16 selon la taille de la base d'expansion pour les configurations capteurs (c) et (e).

On voit, ici, sur un cas où le modèle local est exact que la configuration capteurs intervient sur la qualité de reconstruction. Aussi la configuration (c) privilégie l'information autour des points d'interface avec des mesures tri-axiales sur la couronne supérieure, ce qui améliore la reconstruction des modes principalement visés par la modification, les modes d'ovalisation. Les configuration (a), plus complète, n'apporte cependant pas d'information intéressante pour la prédiction du couplage. L'utilisation d'une configuration très dense ne semble pas nécessaire.

La configuration (e), quant à elle, n'est pas en mesure de reconstruire les déformées dans leur globalité car elle ne permet l'observation des déformées de la plaque. Elle est néanmoins capable de reconstruire l'information de l'effet du couplage dans la zone de l'interface.

Les configurations (b) et (d), enfin, qui sont quasiment équivalentes à la configuration (c) en ce qui concerne le nombre de capteurs, donnent des résultats quasiment à la hauteur de ceux obtenus avec la configuration (c) mais apportent une information assez incomplètes dans la zone de l'interface. Aussi, dans les situations où la qualité du modèle local est à remettre en doute, on privilégiera donc une configuration capteurs avec le plus d'information possible autour de l'interface.

### 5.4.2 Choix du modèle local

L'objectif de cette section de montrer quelle peut être l'influence du modèle local dans l'application de la méthode LMME. Le modèle local est un élément central de la méthode. Il sert de support géométrique pour la reconstruction des mouvements à l'interface. Il doit permettre la réalisation d'une relation cinématique entre les données d'essais et la modification envisagée. Il est le support de la construction d'une gamme de déformées, cohérentes avec la mécanique de la structure, permettant d'enrichir une base d'expansion. Cette base d'expansion est utilisée pour reconstruire les mesures et permettre le couplage avec la modification.

Dans cette section, on utilise le modèle aux éléments finis de référence et la configuration capteurs (a), présentée sur la figure 5.9.

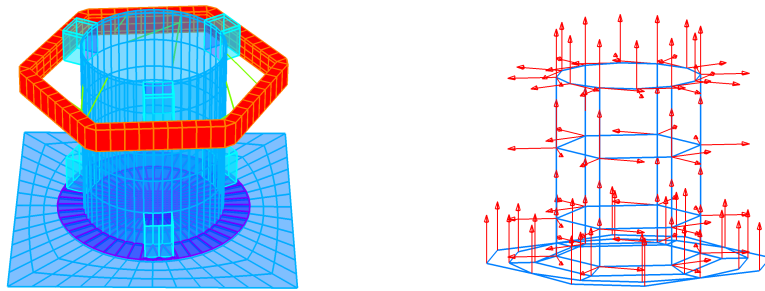


FIG. 5.9 – Modèle éléments finis de la structure modifiée et configuration capteurs utilisée pour l'application de la méthode LMME.

La méthode est appliquée pour différentes configurations de modèles locaux pour déterminer les paramètres influençant la qualité de la prédiction.

#### 5.4.2.1 Étude de l'effet d'un paramètre géométrique du modèle local

Dans un premier temps, considérons un modèle local reprenant les propriétés matériaux et la géométrie de la structure de référence, à l'exception de l'épaisseur du cylindre. Pour ce paramètre, on considère une plage de variation allant de  $1mm$  à  $15mm$ . La valeur nominale de l'épaisseur est de  $5mm$ . L'écart entre les épaisseurs considérées est volontairement exagéré pour permettre une illustration claire de l'effet du modèle local et de ces biais de modélisation.

On propose l'étude du mode 10 de la structure de référence, qui correspond à un mode d'ovalisation à 2 lobes très amorti.

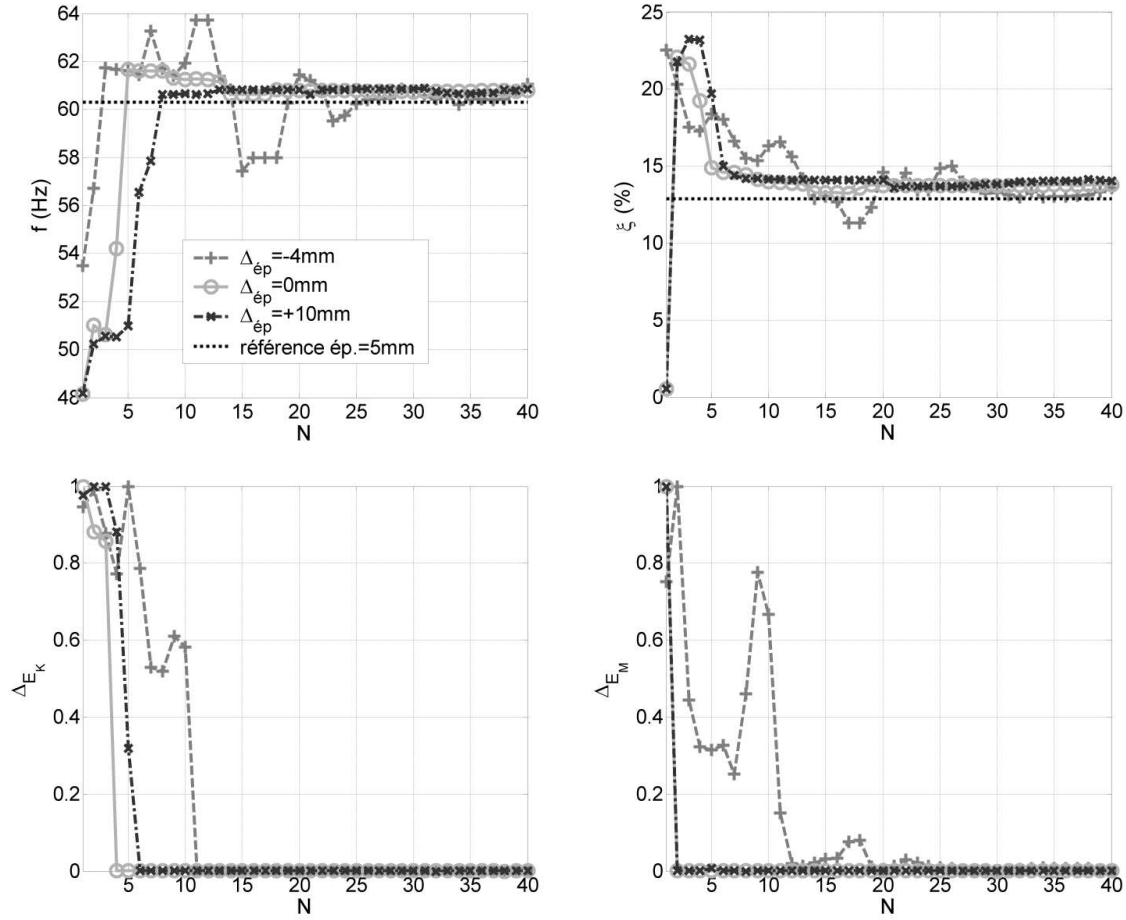


FIG. 5.10 – Évolution des valeurs de prédiction selon la taille de la base d'expansion pour différentes épaisseurs du cylindre du modèle local.

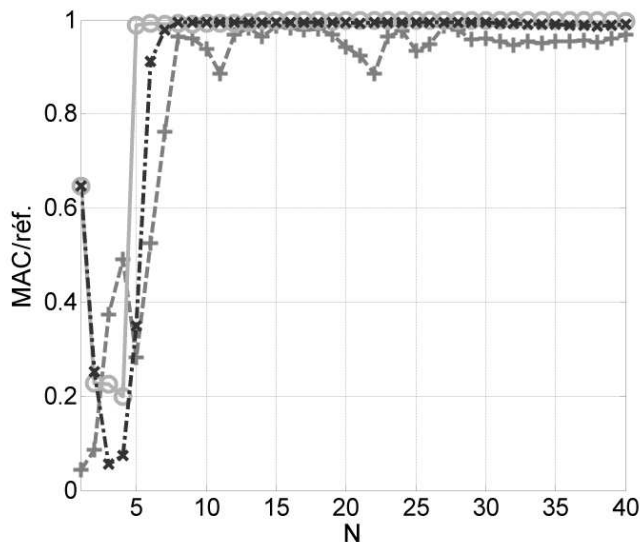


FIG. 5.11 – Évolution du MAC sur les ddl de test entre le mode 10 d’ovalisation à 2 lobes prédit et le mode 10 de référence selon la taille de la base d’expansion pour différentes épaisseurs du cylindre du modèle local.

Dans tous les cas, les résultats sont satisfaisants. Les résultats de prédiction présentés sur la figure 5.10 indiquent une très bonne estimation des fréquences propres et des amortissements. Ces résultats sont confirmés par les MAC entre les prédictions et les formes de références présentées sur la figure 5.11, à l’exception des résultats obtenus avec l’épaisseur la plus faible. L’estimation des amortissements est également de très bonne qualité. Cette première analyse illustre donc l’intérêt du modèle local, qui permet d’obtenir de bonnes estimations du comportement même lorsque ce modèle est loin d’être recalé.

On remarque qu’une épaisseur sur-dimensionnée semble moins pénalisant pour la prédiction qu’une épaisseur sous-dimensionnée. Le fait de sous-dimensionner l’épaisseur modifie assez nettement le comportement de la structure et, en particulier, la forme du mode d’ovalisation considéré pour ce modèle local (fig. 5.12 (a)) est sensiblement modifiée par rapport à celle obtenue avec le modèle local de référence (fig. 5.12 (b)). Les effets locaux liés aux masses ajoutées des appendices et aux raideurs des tirants sont en effets moins prononcés lorsque l’épaisseur augmente. Une épaisseur faible induit des mouvements plus singuliers des vecteurs définissant la base d’expansion. Il est alors nécessaire de considérer un nombre de modes importants dans la base d’expansion pour reconstruire une déformée cohérente avec les mesures. Le choix de la taille  $N$  de la base d’expansion est donc rendu moins évident, du fait des participations très locales de chaque mode à la reconstruction globale. Les IERI ne se stabilisent qu’à partir du moment où la base d’expansion comporte plus de 25 modes, lorsque

la somme des mouvements locaux permet de reconstruire le mouvement global. Augmenter l'épaisseur permet de régulariser l'expansion et les évolutions des prédictions comme celle des indicateurs de qualités.

Cependant, sur-dimensionner l'épaisseur raidit la structure, et le mode d'intérêt pour la reconstruction apparaît alors plus tard dans la base, bien qu'il présente une forme similaire au mode de référence (fig. 5.12 (c)). La chute de l'indicateur en énergie de déformation  $\Delta_{EK}$ , qui indique l'apparition d'un mode important pour le processus de reconstruction, apparaît pour une base d'expansion contenant 7 modes, alors que pour le modèle local de référence, elle intervient à l'introduction du 5<sup>ième</sup> mode. Il faut donc veiller à conserver des ordres de grandeurs raisonnables pour les paramètres physiques importants pour conserver des tailles de bases d'expansion raisonnables.

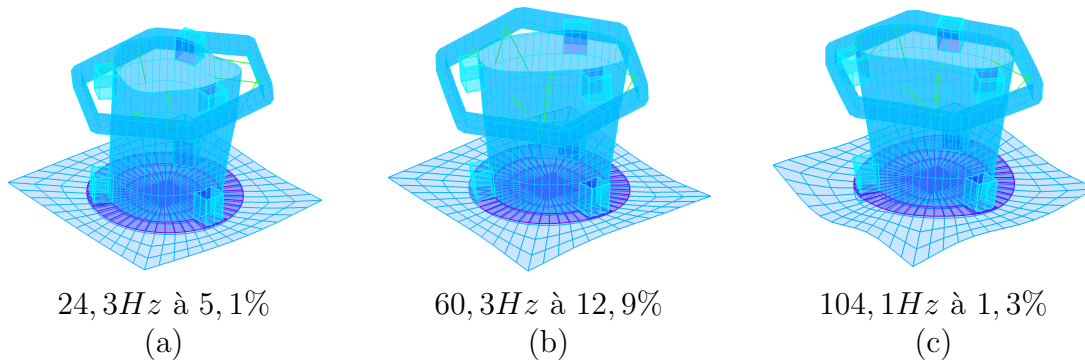


FIG. 5.12 – Modes d'ovalisation à 2 lobes selon l'épaisseur du cylindre.

La phase d'expansion permet de rattraper une partie du biais de modélisation. On retrouve effectivement un mode d'ovalisation à 2 lobes parmi les modes étendus d'interface, mais l'examen local autour des points d'interface révèle une différence sensible du comportement. Les figures 5.13(a) et 5.13(b) permettent de comparer la forme du cinquième mode d'interface construit, respectivement, à partir du modèle local « fin », et à partir du modèle local « épais », avec celui construit à partir du modèle local de référence.

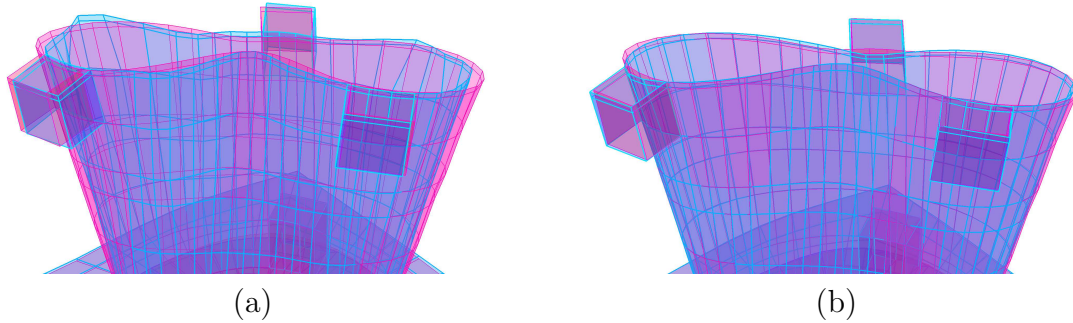


FIG. 5.13 – Comparaison d’une déformée d’ovalisation à 2 lobes étendue à partir des bases d’expansion correspondant au modèle local « fin » (a), et au modèle local « épais » (b), avec celle provenant du modèle local de référence.

#### 5.4.2.2 Étude de l’effet d’un paramètre de conception du modèle local

Après avoir étudié l’influence d’un paramètre physique sur la qualité de la prédiction, on s’intéresse à l’effet d’hypothèses faites sur la géométrie du modèle local. Les modèles locaux utilisés sont présentés sur la figure 5.14. Le modèle local de référence (a), utilisé jusqu’ici, est assez fidèle à la réalité du démonstrateur. Les appendices ont été inclus, avec des propriétés géométriques et mécaniques réalistes, et la jonction entre la plaque et le cylindre est réalisée finement. Cette liaison est modélisée en utilisant quatre liaisons localisées construites entre la plaque carrée de base et la plaque circulaire support du cylindre. Au niveau de la zone foncée de la figure 5.14, on a donc deux modèles de plaques parallèles, solidarités ponctuellement. La géométrie et l’ajustement des paramètres de la liaison ont fait l’objet d’un rapide recalage, présentés dans la section 3.2.3. Un deuxième modèle (b) est donc introduit pour étudier la pertinence de cette approche. Ce deuxième modèle est volontairement très simplifié. La géométrie globale est identique, mais les appendices ne sont pas modélisés, et la jonction entre la plaque et le cylindre n’est pas représentée. Le modèle du cylindre est simplement encastré sur la plaque de base. En particulier, la plaque support du cylindre (zone circulaire blanche visible sur la photo 3.3) n’a pas été représentée, induisant un comportement d’ensemble largement différent.

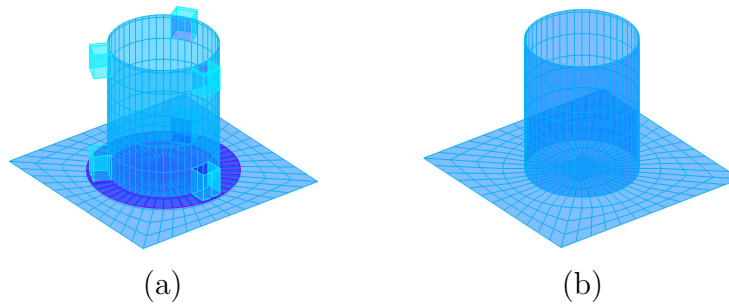


FIG. 5.14 – Modèles locaux étudiés.

Pour mettre en lumière l'influence du modèle local et l'intérêt des indicateurs énergétiques IERI, on discutera ici des résultats obtenus pour la prédiction du mode 15, mode d'ovalisation à 3 lobes. Les résultats obtenus dans les deux configurations sont présentés sur la figure 5.15.



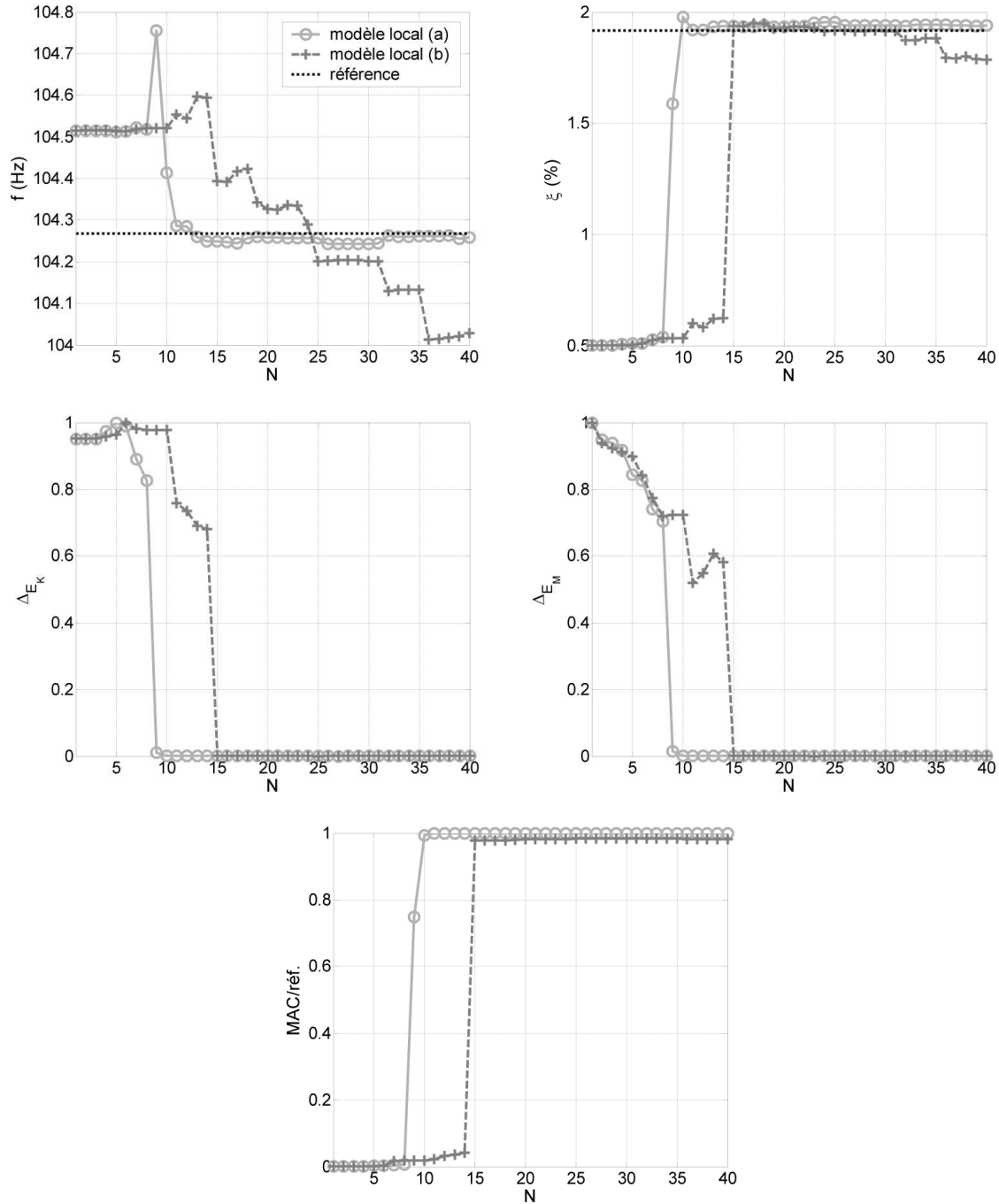


FIG. 5.15 – Prédiction pour 2 modèles locaux.

Les deux modèles locaux introduits permettent une bonne prédiction du mode. Les fréquence, amortissement et déformée sont bien estimés, dès lors que les IERI

sont stabilisés. La prédiction réalisée avec le modèle local très réaliste est de meilleure qualité, notamment sur la stabilité de la forme prédite.

Pour la prédiction réalisée à partir du modèle local (a), l'introduction du 9<sup>ième</sup> mode permet de faire chuter les IERI. En utilisant le modèle local (b), le 15<sup>ième</sup> est déterminant. Les indicateurs IERI se stabilisent ensuite, même si les prédictions de fréquences sont un peu perturbées. Dans les deux cas, un mode particulier de la base d'expansion permet de reconstruire largement ce mode 15. L'examen de ces modes (fig. 5.16(a),(b)) montre qu'ils sont très proches en forme du mode 15 de la structure modifiée (fig. 5.16(c)), notamment autour des points d'interface.

En conclusion, de façon analogue à l'étude menée sur l'influence de l'épaisseur, il apparaît donc qu'un modèle local assez peu représentatif peut tout de même fournir des prédictions de bonne qualité. Les résultats obtenus seront moins bons, dans l'absolu, que ceux obtenus avec le modèle fin, mais c'est surtout l'analyse des évolutions qui est rendue plus délicate.

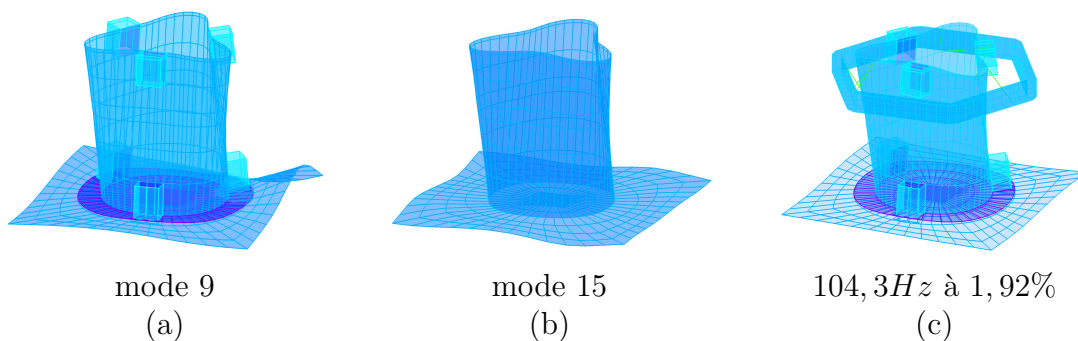


FIG. 5.16 – Modes des bases d'expansion Modes d'ovalisation à 2 lobes selon l'épaisseur du cylindre.

### 5.4.3 Choix de la taille de la base d'expansion

Le processus de prédiction des modes, fréquences et amortissements par X-LMME repose sur l'expansion des données mesurées. Par construction, la base choisie pour réaliser l'expansion est de taille variable, il convient donc d'opérer un choix judicieux pour sélectionner le nombre de vecteurs optimal. Ce choix est réalisé à l'issue de plusieurs calculs de prédiction effectués pour différentes tailles de base et s'appuie sur deux indicateurs. Le calcul de ces indicateurs énergétiques de régularité de l'interface (IERI) a été présenté dans la section 4.3.4 par les relations (4.49) et (4.50).

Ils ont été développés dans le but d'estimer la vraisemblance des modes d'interface reconstruits en terme de régularité sur toute l'interface et de précision aux points d'interface. L'un est normé en masse (énergie cinétique), l'autre en raideur (énergie de déformation). Le choix de la troncature de la base d'expansion est un problème qui

n'obéit pas au critère de Rubin, puisque le modèle local n'est pas sensé être représentatif de la structure. D'autre part, ce choix doit réaliser un compromis entre régularité des formes reconstruites et précision des mouvements, à la fois pour faciliter l'analyse de la prédiction, et en même temps donner des indications précises. Ils ne permettent pas d'assurer l'exactitude de la solution, mais cherchent à en maximiser la vraisemblance.

D'une manière générale, on s'attend à ce que des valeurs faibles des indicateurs soient associées à la qualité de la prédiction. Néanmoins, c'est autant l'évolution des indicateurs que leur valeur qui importent. À ce titre, on notera qu'une chute brutale d'un des deux indicateurs indique une augmentation sensible de la qualité de la reconstruction au sens de cet indicateur. L'indicateur en raideur (énergie de déformation) sera plutôt sensible à la précision de la reconstruction, et l'indicateur en masse (énergie cinétique) détectera plutôt la régularité de la reconstruction. Enfin, une plage importante de stabilité tendra à indiquer que l'ensemble des vecteurs ayant des composantes importantes dans la déformée du mode à reconstruire a déjà été utilisé pour reconstruire le mouvement. Dans cette optique, on cherchera à retenir comme optimum les valeurs se situant après une ou plusieurs chutes brutales, et précédant un plateau de stabilité. En effet, en limitant le nombre de vecteurs retenu pour l'expansion, on limite la propagation des différents bruits de mesures et biais de modèles.

Néanmoins, pour venir confirmer ce choix, il sera indispensable d'analyser les déformées prédites, ainsi que les formes utilisées pour reconstruire le mouvement du mode à prédire. Cette étape est essentielle pour garantir un résultat de qualité.

On reprend, dans cette section, la configuration capteurs (a) du cas test défini en 5.4.1, et le modèle local de référence. On s'intéresse à la prédiction du mode 16, mode à 3 lobes.

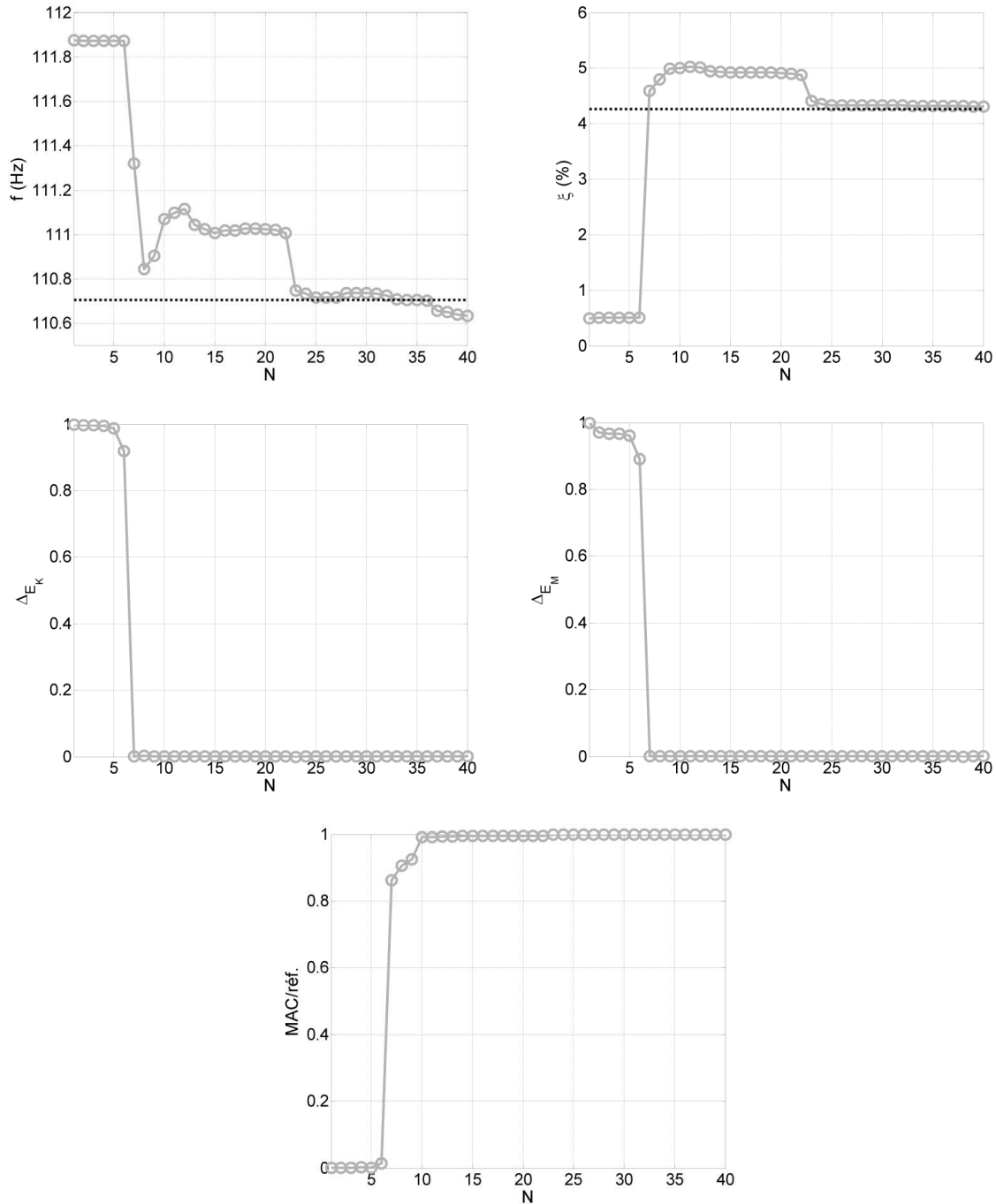


FIG. 5.17 – Évolution des valeurs de prédiction du mode 16 selon la taille de la base d'expansion.

Les courbes d'évolution de la prédiction présentées sur la figure 5.17 montrent que

certaines vecteurs de la base d'expansion sont très influents sur le résultat de prédiction. Le vecteur 7 (figure 5.18) de la base d'expansion permet, par exemple, d'atteindre un palier de valeurs stabilisées après avoir fait largement chuter les IERI. Ce point dans l'évolution n'est pas l'optimum de la prédiction ni pour la fréquence, ni pour l'amortissement, mais donne une estimation raisonnable du comportement couplé, tant en fréquence et amortissement qu'en forme, ainsi que l'atteste la figure 5.17.

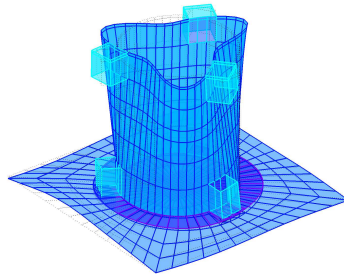


FIG. 5.18 – Vecteur 7 de la base d'expansion.

Les chutes des IERI à l'introduction du 7<sup>ième</sup> vecteur, le faible niveau et la stabilité de ceux-ci pour  $N \geq 7$  indiquent que les bases comportant plus de 7 vecteurs sont les plus adéquats pour représenter le mouvement à l'interface.

L'introduction du vecteur 23 présenté sur la figure 5.19 dans la base d'expansion permet cependant d'atteindre un nouveau palier pour les prédictions de la fréquence et de l'amortissement.

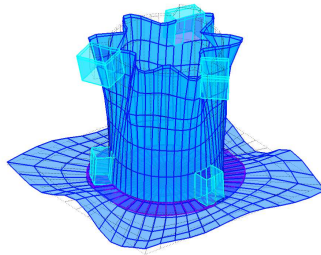


FIG. 5.19 – Vecteur 23 de la base d'expansion.

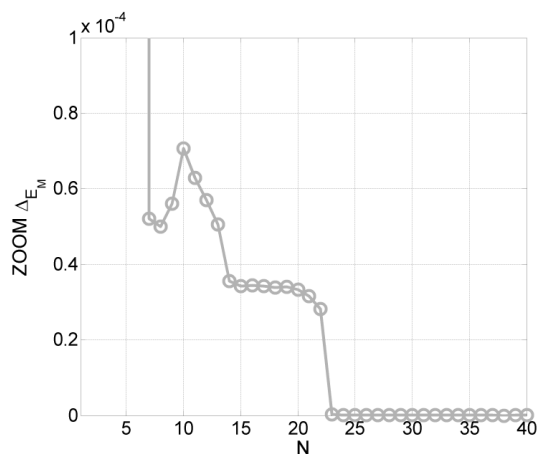


FIG. 5.20 – Zoom sur l'évolution de l'IERI en énergie cinétique pour la prédiction du mode 16.

Un zoom sur l'IERI normé en masse 5.20 permet en effet de cibler ce vecteur. Les IERI étant normés entre eux, la forte valeur de ces derniers pour des tailles de base inférieures à 7 vecteurs est normale puisque la forme globale du mode à reconstruire n'est alors pas encore présente dans la base. Effectuer un zoom pour ne comparer que les valeurs obtenues après une chute brutale des IERI est donc légitime.

Cependant, la prise en compte d'un nombre trop important de vecteurs dans la base d'expansion limite, de manière générale, l'intérêt de la méthode en diminuant l'effet régularisant puisqu'on introduit alors des vecteurs dont les déformées sont trop localisées. Il faut même noter que l'élargissement de la base d'expansion peut dégrader les résultats de prédiction. On observe en effet que, pour une base d'expansion contenant plus de 36 vecteurs, la fréquence prédite commence à diverger.

L'analyse des indicateurs, de leurs valeurs et de leurs évolutions, combinée à l'étude des déformées prédites ainsi que celle des vecteurs retenus pour l'expansion permettent de retenir *a priori* un résultat de prédiction raisonnable. Cette analyse cependant doit être menée en regard de la qualité du modèle local construit pour l'étude, du maillage capteur utilisé pour la mesure, mais aussi de l'analyse modale et des hypothèses réalisées pour identifier le modèle dynamique de comportement de la structure de base. Les indications fournies par les IERI seront d'autant plus précises que les étapes précédant la prédiction auront été réalisées avec soin. Lorsque les mesures sont bruitées, l'identification difficile, ou la confiance dans le modèle local limitée, alors la taille de la base d'expansion à considérer doit être restreinte. Au delà d'une certaine taille, les déformées introduites ne permettent pas de reconstruire une information cohérente avec la dynamique du problème.

## 5.5 Spécificités des modifications dissipatives

On considère dans cette section, le même démonstrateur que dans la section 5.3. En revanche, la dépendance fréquentielle du comportement de la modification est ici prise en compte. Cela nous amène à nous questionner sur certains choix à réaliser.

### 5.5.1 Choix de la fréquence centrale pour le calcul de la base de réduction

On a vu que le modèle local peut avoir une influence sur la qualité de prédiction dans l'application de la méthode LMME (section 5.4.2.1). Or, dans le cas de modifications dont le comportement dépend notamment de la fréquence, le modèle local, qui inclut la modification, voit son comportement évoluer en fonction de la fréquence à laquelle on réalise la prédiction.

Dans cette section, on étudie donc l'influence que peut avoir le choix du comportement de la modification dans le modèle local. On conclut alors sur la nécessité ou non de prendre en compte cette dépendance.

Considérons cinq bases d'expansion différentes construites à partir de modèles locaux incluant la modification pour différentes fréquences. Pour chaque base, le comportement de la modification est recalé en fonction de la fréquence considérée. Les différentes bases correspondent respectivement aux fréquences  $f = 10Hz$ ,  $f = 60Hz$ ,  $f = 100Hz$ ,  $f = 150Hz$ ,  $f = 200Hz$  et  $f = 10000Hz$ . La figure 5.21 donne les valeurs du module de cisaillement  $G_{local}$  du matériau viscoélastique et du facteur d'amortissement pour les modèles locaux.

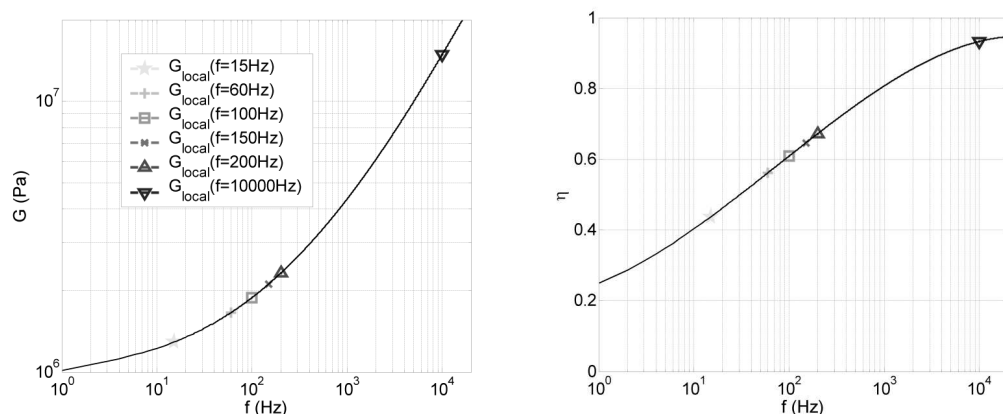


FIG. 5.21 – Évolution du comportement de l'élastomère smactane50 à 20°C.

Le couplage est réalisé avec une modification pour laquelle le module de cisaillement et le facteur d'amortissement du matériau viscoélastique sont à la fréquence  $f = 60Hz$ .

Les résultats du couplage hybride sont présentés sur la figure 5.22.

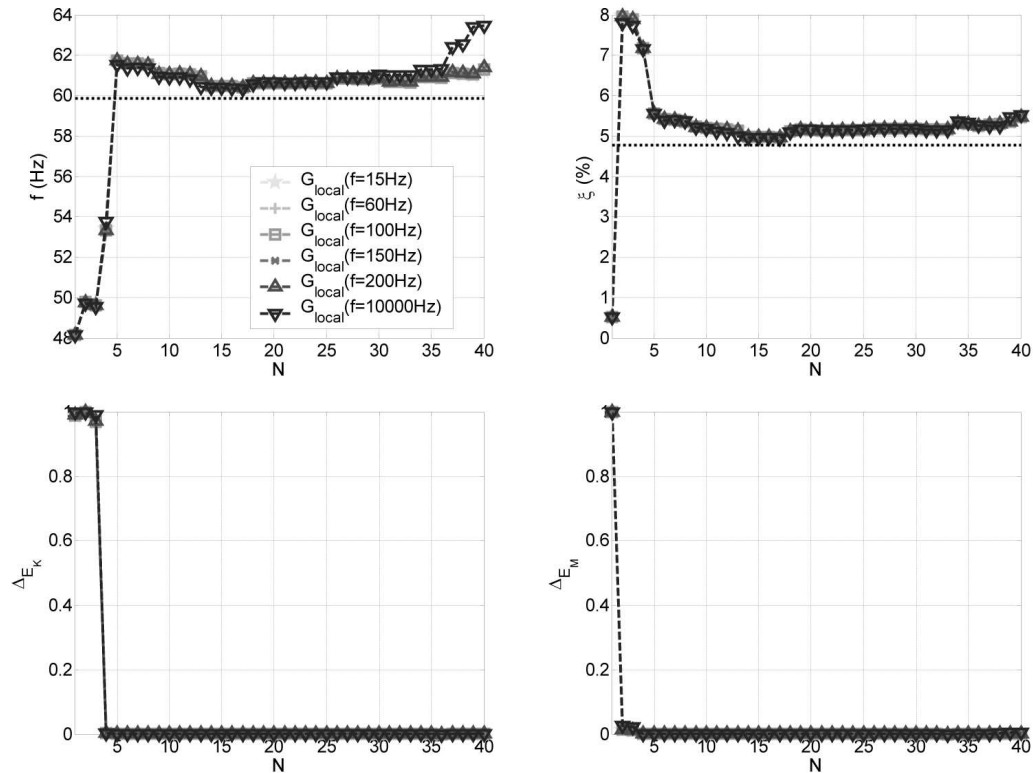


FIG. 5.22 – Évolution des fréquence et amortissement d'un mode d'ovalisation à 2 lobes prédits et des indicateurs d'erreur associés selon la taille de la base d'expansion, pour différentes bases d'expansion.

Les calculs réalisés à partir de ces cinq bases d'expansion montrent que la prise en compte fine du comportement du matériau viscoélastique dans le calcul de la base d'expansion n'a quasiment pas d'influence sur le résultat de couplage et sur les IERI. Ce résultat s'explique par la colinéarité des sous espaces correspondant aux calculs à chaque fréquence. En effet, comme le montrent les tableaux 5.5 et 5.6, l'angle entre deux sous espaces obtenus en considérant des fréquences différentes est en général très faible.



	$T_{15Hz}$	$T_{60Hz}$	$T_{100Hz}$	$T_{150Hz}$	$T_{200Hz}$	$T_{10000Hz}$
$T_{15Hz}$	0	0,5	0,9	1,2	1,5	12,2
$T_{60Hz}$		0	0,3	0,7	0,9	11,6
$T_{100Hz}$			0	0,3	0,6	11,3
$T_{150Hz}$				0	0,3	11,0
$T_{200Hz}$					0	10,7
$T_{10000Hz}$						0

TAB. 5.5 – Angles entre les sous-espaces représentés par les différentes bases d'expansion (30 vecteurs) associées à chaque fréquence, projetées sur le maillage capteurs.

	$T_{15Hz}$	$T_{60Hz}$	$T_{100Hz}$	$T_{150Hz}$	$T_{200Hz}$	$T_{10000Hz}$
$T_{15Hz}$	0	1,5	2,4	3,5	4,3	67,5
$T_{60Hz}$		0	0,9	1,9	2,8	66,3
$T_{100Hz}$			0	1,0	1,9	65,6
$T_{150Hz}$				0	0,9	64,7
$T_{200Hz}$					0	64,0
$T_{10000Hz}$						0

TAB. 5.6 – Angles entre les sous-espaces représentés par les différentes bases d'expansion (40 vecteurs) associées à chaque fréquence, projetées sur le maillage capteurs.

On montre donc que le comportement associé aux premiers modes de la structure est relativement peu dépendant du comportement du matériau viscoélastique. Les modes sont évidemment différents, mais ils représentent le même sous espace. En effet, pour des bases de petites tailles ( $N \leq 30$ ), on remarque que les angles restent faibles. La seule exception est le cas du calcul réalisé pour une fréquence centrale très élevée, en considérant un nombre important de vecteurs. Dans ce cas, les modes d'ordre supérieurs diffèrent, et les résultats de l'expansion aussi. La prédiction obtenue est alors différente, comme l'atteste la figure 5.22.

Pour une application classique de la méthode sur une bande de fréquences de taille raisonnable (de l'ordre de 200Hz pour des applications basse fréquence), on voit qu'il n'est pas nécessaire de recalculer le comportement du modèle local pour les différentes fréquences. Ce résultat était attendu du fait même de la méthode : la construction des modes d'interface passe par une phase de réduction statique qui filtre le caractère dissipatif de la modification incluse dans le modèle local. De plus la souplesse de la modification sur toute la bande de fréquences considérée implique un faible changement des déformées. La section suivante illustre cette caractéristique des modifications dissipatives.

### 5.5.2 Évolution du comportement de la modification selon la fréquence

Dans le cas de modifications structurales amorties incluant des matériaux dont le comportement dépend de la fréquence, il est nécessaire de résoudre le problème couplé pour chaque pas de fréquence. On a vu à la section 5.5.1 que, pour le calcul de la base d'expansion, le modèle local incluant la modification n'a pas besoin d'être recalé pour chaque pas de fréquence. En revanche, lors de la phase de couplage, l'évolution selon la fréquence du comportement de la modification doit être pris en compte.

Après discrétisation de la bande de fréquences considérée, et résolution du problème couplé pour chaque pas, on trace l'évolution des prédictions en fonction de la taille  $N$  de la base d'expansion pour chaque pas de fréquence. La figure 5.23 montre l'évolution des fréquences et des amortissements pour différentes valeurs du module de cisaillement caractéristique du comportement mécanique du matériau viscoélastique.

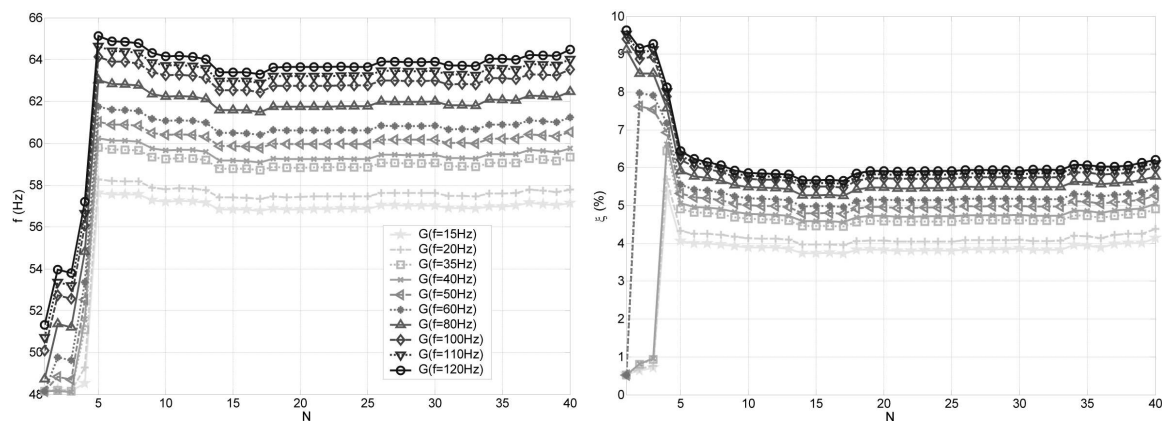


FIG. 5.23 – Évolution des prédictions selon la fréquence considérée pour le comportement du matériau viscoélastique.

Le comportement des IERI est, en revanche, généralement similaire d'une valeur de  $G$  à l'autre.

Pour le mode considéré ici, l'emploi d'un module de cisaillement  $G(f = 60Hz)$  est le choix qu'il faut faire. La discrétisation utilisée (pas fréquentiel de  $10Hz$  à  $20Hz$ ) est relativement adaptée pour la vitesse d'évolution du comportement du matériau viscoélastique selon la fréquence puisqu'on observe un faible écart, de  $1Hz$  à  $2Hz$  pour les modules associés à  $f = 50Hz$  ou  $f = 80Hz$ .

Il est toujours possible de raffiner la discrétisation de la bande de fréquence afin de sélectionner exactement le module correspondant au mode prédit. Notamment, dans le cas d'évolution plus rapide du comportement du matériau viscoélastique selon la fréquence, il peut s'avérer indispensable d'affiner la discrétisation. Cependant, cette

approche présente peu d'intérêt, et il est plus intéressant de reconstruire directement les transferts. En effet, dans les zones de fortes variations des propriétés mécaniques, la prédiction des modes propres, fréquences propres et amortissements est délicate. La synthèse modale permet alors d'estimer directement le niveau vibratoire après modification, et intègre naturellement les effets de la dépendance fréquentielle du comportement du matériau viscoélastique.

Pour construire ces transferts, il suffit de s'appuyer, autour de chaque mode couplé, sur les indications fournies par les IERI. Pour chaque bande de fréquence, le choix des vecteurs à utiliser pour la reconstruction est indiqué, et il suffit de reconstruire un modèle couplé de la structure en fonction d'une taille de base d'expansion donnée. Dans le cas d'une zone où plusieurs modes couplés peuvent interagir, la sélection de la taille de base optimale est plus délicate, puisqu'elle fait intervenir les évolutions des IERI pour chaque mode en présence. On peut dès lors réaliser la prédiction de chaque mode avec le module  $G$  associé à la fréquence du mode.

Les transferts, synthétisés à partir des modes complexes prédits et de l'équation (2.22), ne sont en effet pas exacts dans le cas de structures dont le comportement dépend fortement de la fréquence (section 2.1.3). Le biais de synthèse est cependant négligeable lorsque la dépendance n'est pas trop importante.

La figure 5.24 permet de vérifier que, dans notre cas d'étude avec un matériau viscoélastique standard (*smactane50*), l'erreur de synthèse est faible. On considère les modes calculés avec le module de comportement associé à leur fréquence propre, et on compare un transfert direct calculé à l'aide de l'équation (5.2) avec le transfert synthétisé.

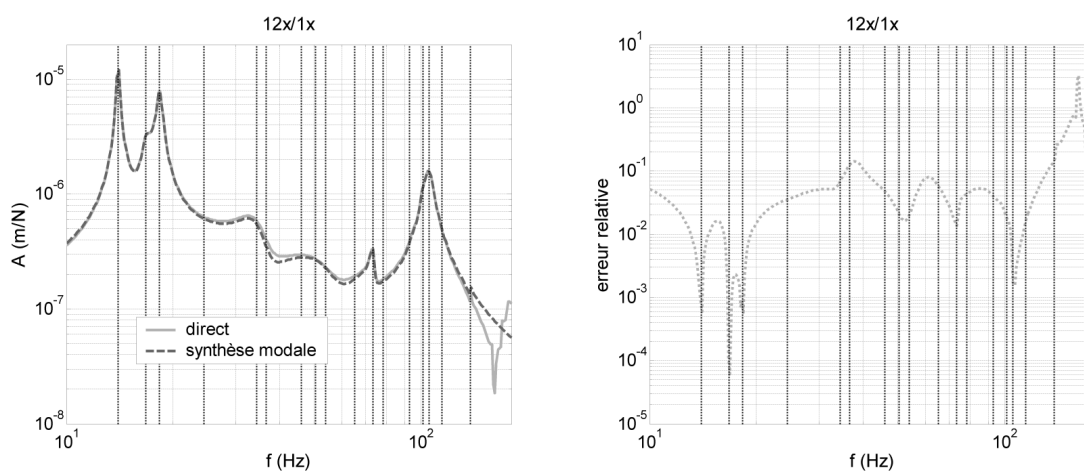


FIG. 5.24 – Transferts direct et synthétisé à partir des modes complexes calculés avec une valeur de module correspondant à leur fréquence propre. Erreur relative entre le transfert direct et la synthèse modale. (localisation entrée/sortie donnée en figure 3.7)

## 5.6 Comparaison essais/prédiction

Afin de confronter la méthode LMME étendue à la réalité, on réalise une prédiction de l'effet de la modification sur le démonstrateur défini au chapitre 3.

Les modes identifiés de la structure initiale sont dans la bande de fréquence  $[10; 200]Hz$ . Le maillage capteur utilisé est suffisamment dense pour permettre l'identification des modes à 4 lobes dont la fréquence propre est proche de  $200Hz$ . Il s'agit de la configuration retenue à la section 3.2.2.

Le modèle local retenu est le modèle numérique décrit à la section 3.3.4. Pour le comportement de la modification dans le modèle local, on choisit un module de cisaillement  $G = G(f = 100Hz, T = 20^\circ)$ .

L'analyse modale de la structure initiale a été présentée en section 3.2.2. Quinze modes ont été identifiés. Les synthèses modales réalisées à partir de ces modes sont de bonne qualité (figure 3.11).

Le processus de prédiction des modes est relativement systématique. Pour chaque taille de base d'expansion, et chaque pas de fréquence, on réalise l'étape de couplage des sous-structures (structure et modification) et on évalue les IERI. À l'issue de ces calculs, la taille de la base d'expansion est déterminée pour chaque mode.

En règle générale, les modes les plus influents sur la synthèse modale sont obtenus à l'issue d'une phase de dépouillement relativement aisée. La prédiction d'un des modes d'ovalisation à 3 lobes (figure 5.27) est un bon exemple.

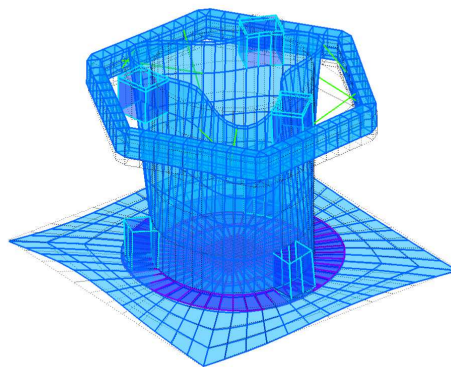


FIG. 5.25 – Mode d'ovalisation à 3 lobes prédit.  $f = 117,9Hz$ ,  $\xi = 4,9\%$

Les courbes d'évolution des paramètres de prédiction de ce mode sont données en figure 5.26.

Différentes valeurs de module de cisaillement du matériau viscoélastique sont considérées. Pour la clarté de la figure, seules quelques valeurs sont présentées. Le

choix d'un module de cisaillement  $G(f = 120Hz)$  est raisonnable, après analyse des valeurs de prédiction potentielles.

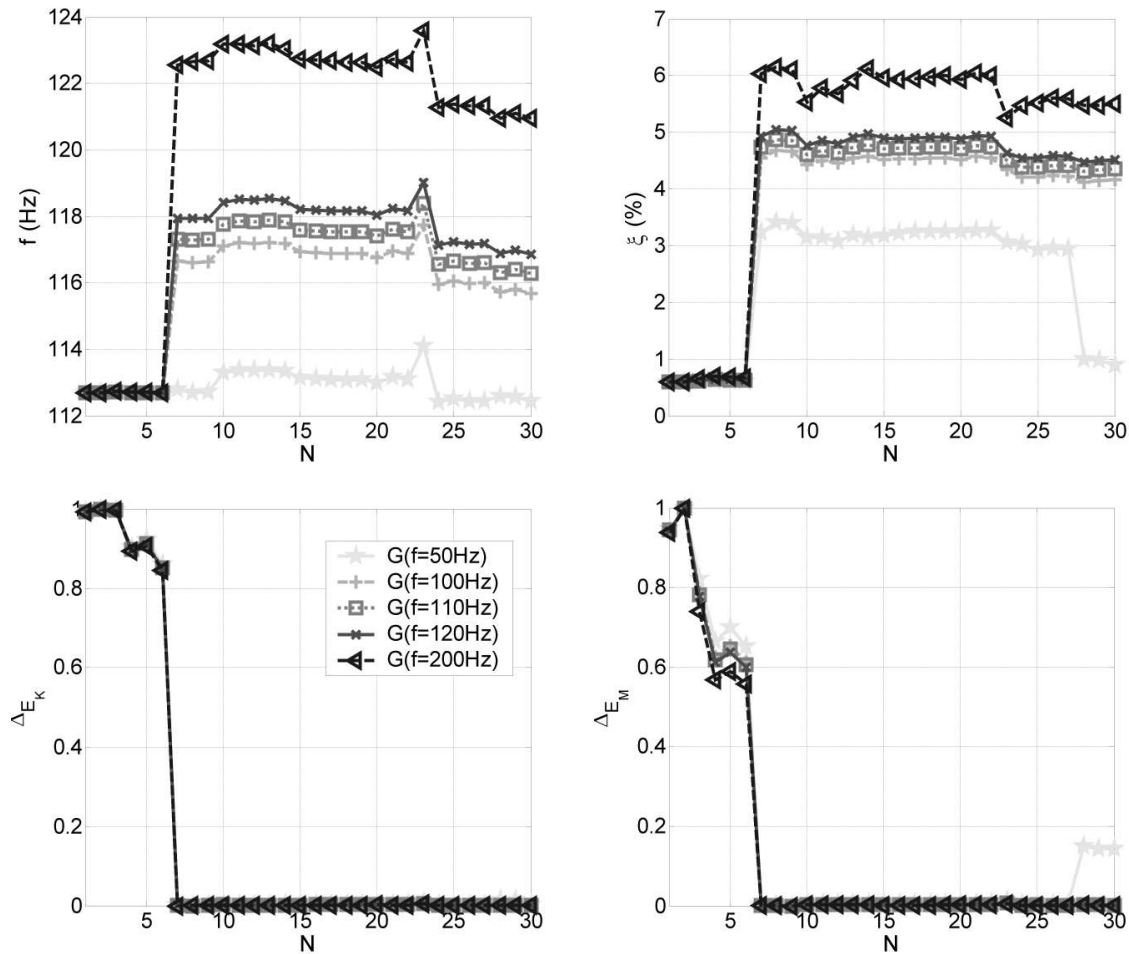


FIG. 5.26 – Évolution des paramètres de prédiction d'un mode d'ovalisation à 3 lobes selon la taille  $N$  de la base d'expansion pour différentes valeurs de  $G$ .

Les IERI et les courbes d'évolution de la fréquence propre et de l'amortissement modal du mode en fonction de la taille de la base d'expansion désignent une taille optimale d'au moins 7 vecteurs. Le septième vecteur constituant la base d'expansion correspond à la forme de base du mode d'ovalisation à 3 lobes.

Cependant sur certains modes, le dépouillement nécessite une analyse plus approfondie. Prenons l'exemple de dépouillement de prédiction du mode d'ovalisation à 2 lobes présenté en figure 5.27. La prédiction de ce mode est la conclusion de l'examen des courbes de la figure 5.28.

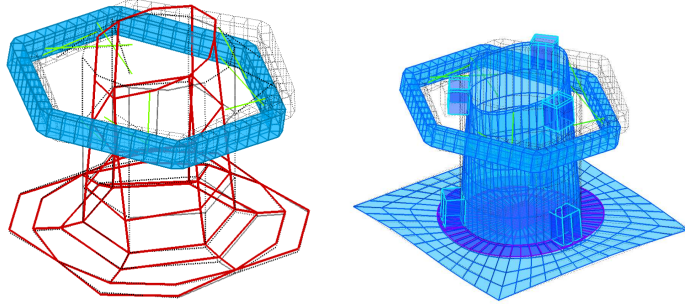


FIG. 5.27 – Mode d'ovalisation à 2 lobes prédit.  $f = 41,4\text{Hz}$ ,  $\xi = 7,1\%$ .

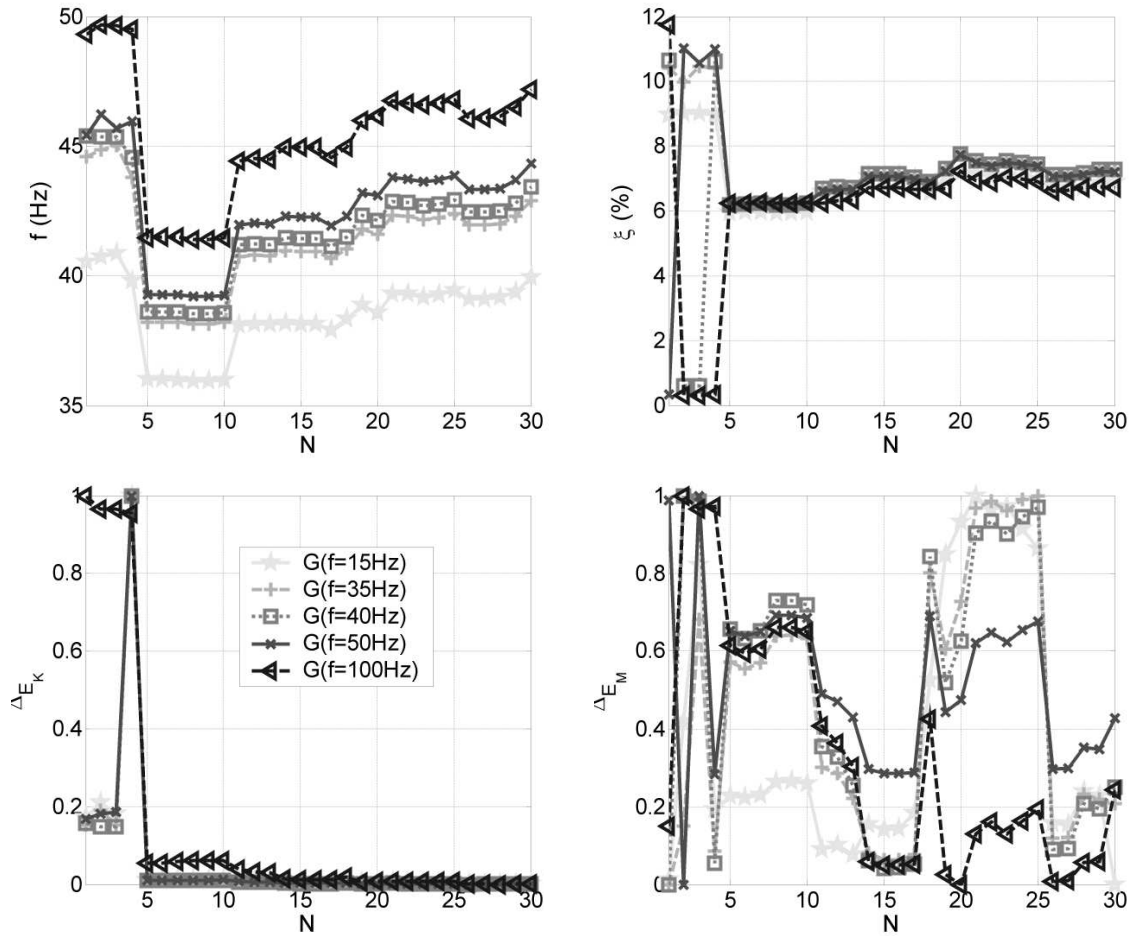


FIG. 5.28 – Évolution des paramètres de prédiction d'un mode d'ovalisation à 2 lobes selon la taille  $N$  de la base d'expansion pour différentes valeurs de  $G$ .

Le module de cisaillement  $G(f = 40Hz)$  est choisi pour la prédiction de ce mode dont la fréquence propre est proche de  $40Hz$ . Les IERI  $\Delta_{EM}$  se stabilisent pour des bases de plus de 5 vecteurs. Ce comportement indique que la reconstruction aux ddl d'interface est raisonnable par rapport à une expansion statique. Les IERI  $\Delta_{EM}$  sont en revanche très désordonnés. Le lissage des déformées est mis en cause. Il faut néanmoins rappeler que les IERI sont normés entre eux et qu'il peut s'agir d'une dispersion « provoquée » par la normalisation alors que les écarts entre l'expansion LMME et l'expansion statique est faible. Une base de 14 à 17 vecteurs semble être à première vue le meilleur choix.

L'examen des vecteurs influents de la base d'expansion aide alors au choix de la taille optimale de la base. La figure 5.29 présente les vecteurs 5, 11, 14 et 18 de la base d'expansion non tronquée.

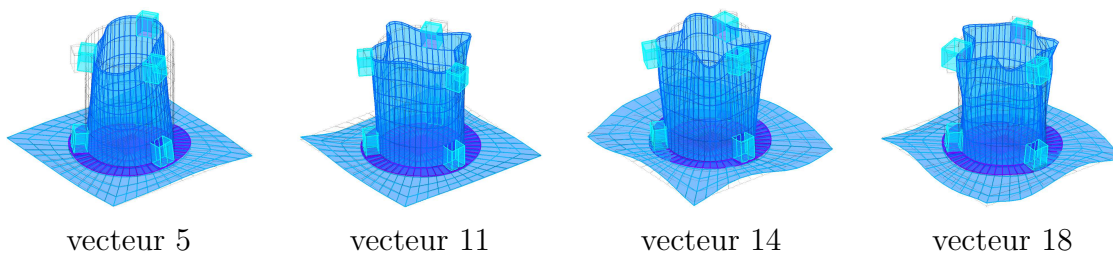


FIG. 5.29 – Vecteurs de la base d'expansion influents pour la prédiction du mode 6.

Le cinquième vecteur est la forme de base du mode d'ovalisation à 2 lobes que l'on considère. Les vecteurs 11 et 14 reprennent les formes des modes d'ovalisation à 4 lobes. Ils apportent une information sur l'effet de la modification autour des points d'interface. Leur prise en compte permet d'atteindre les niveaux d'IERI les plus faibles. Le vecteur 18 a des formes beaucoup plus localisées et risque de perturber le lissage de la déformées à l'interface ; ce qui concorde avec le comportement des  $\Delta_{EM}$ . La taille  $N = 14$  est sélectionnée pour la prédiction du mode 6.

Les modes prédits sont répertoriés dans le tableau 5.7.

Désignation des modes	identification		prédiction	
	$f$ (Hz)	$\xi$ (%)	$f$ (Hz)	$\xi$ (%)
Pompage	12.6	1,5	15.8	0,8
Bascule 1	14.9	2,2	14.8	1,4
Bascule 2	20.7	3,7	21.4	1,7
CR couronne	24.5	8,0	24.5	8,8
Ov.2lob.	35.5	6,1	33.6	3,7
	44.2	6,0	41.4	7,1
CR couronne			44.9	9,8
			50.8	8,5
Ov.2lob.	55.6	12,1	54.5	7,9
	72.0	14,7	67.6	7,5
Mode de plaque	84.2	4,1	81.8	1,4
CR couronne			91.8	10,7
Ov.3lob.	105.6	2,2	106.5	2,0
	110.7	2,7	112.2*	0,8*
	117.1	2,1	117.9	4,9
Modes de plaque	131.0	1,9	127.4	0,9
	147.6	2,6	137.8	0,9

\*La forme prédite est principalement un mode de plaque.

TAB. 5.7 – Désignation des modes de la structure modifiée, fréquences propres et coefficients d'amortissement modaux. Identification et prédiction LMME étendue.

Il est difficile d'obtenir une identification pertinente à partir des mesures du fait du fort amortissement et du nombre important de modes sur la gamme de fréquences considérée. On peut néanmoins remarquer que les fréquences identifiées et celles prédites concordent. Les différences sont plus notables sur l'amortissement. De plus les pseudo-modes très amortis de corps rigide de la couronne sont difficilement identifiables.

Globalement la prédiction modale est raisonnable. Une comparaison directe des mesures avec les transferts synthétisés à partir des modes prédits est préférée pour la validation du processus.

Les résultats de prédiction de l'effet de la modification sur la structure initiale sont corrects. La prédiction du niveau vibratoire est bon.



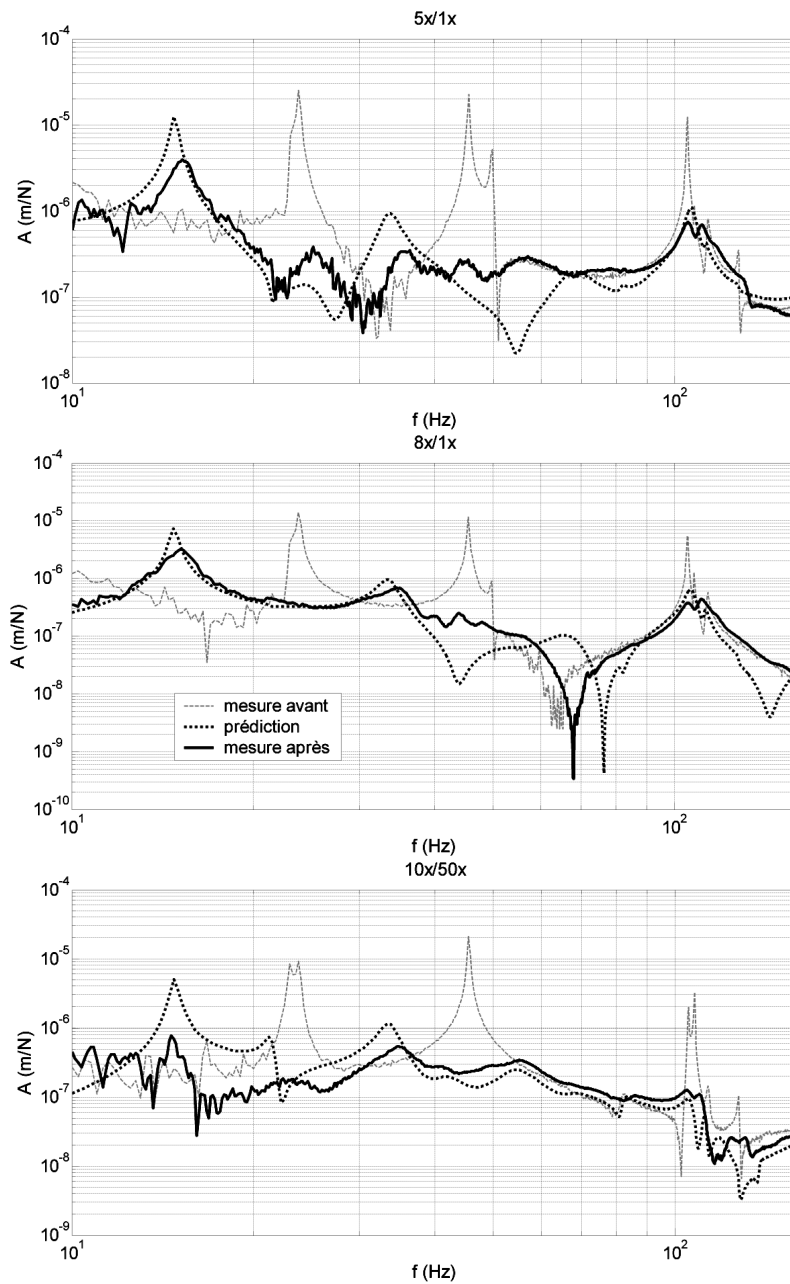


FIG. 5.30 – Transferts avant modification, après modification et prédiction.

Sur les transferts affichés, on retrouve très nettement les modes apportant le plus de niveau : le mode de bascule à  $14,8\text{Hz}$ , le mode d'ovalisation à 2 lobes à  $33,6\text{Hz}$  et les modes d'ovalisation à 3 lobes à  $106,5\text{Hz}$  et  $117,9\text{Hz}$ . L'amortissement prédit est globalement sous-estimé. Sur la bande  $[40; 90]\text{Hz}$  où un fort amortissement est présent, l'identification est plus délicate. On prédit cependant un niveau vibratoire en

concordance avec les mesures.

Les résultats de prédiction obtenus sont très bons si on prend en considération la qualité moyenne de la modélisation de la structure initiale.

Les hypothèses de modélisation des tirants amortis sont largement vérifiées. En effet la modélisation fonctionnelle suffit à rendre compte de l'influence de la modification sur la structure initiale.

Du point de vue de la méthode, la sélection des modes prédits a posé peu de problèmes. Les indicateurs de régularité à l'interface (IERI) ont permis une sélection efficace de la taille des bases de sélection.

On a vu à travers le chapitre 5 que la méthode LMME amortie est efficace pour la prédiction de l'effet de modification structurale dissipative. Elle est particulièrement adaptée au contexte industriel d'EDF et permet d'envisager des applications dans un futur proche.



# Conclusion

Ce travail avait pour objectif d'une part de proposer la mise en œuvre d'un dispositif dissipatif adapté à des problèmes vibratoires rencontrés sur le parc EDF et d'autre part de développer et de valider une méthode de modification structurale. Cette méthode qui dérive de la méthode LMME (déjà utilisée dans le contexte des structures non ou faiblement amorties) a été modifiée pour pouvoir traiter le cas d'ajouts d'éléments fortement dissipatifs sur la structure à modifier.

## Résultats

Une modification amortissante originale intégrant des matériaux viscoélastiques a été développée au chapitre 3. Elle permet le traitement vibratoire d'un démonstrateur étudié dans le cadre de la thèse et représentatif des problèmes rencontrés sur le parc EDF.

L'ajustement des paramètres de conception en relation avec les conditions de fonctionnement autorise un réglage fréquentiel intéressant des performances dissipatives du dispositif. La dépendance en fréquence du comportement des matériaux viscoélastiques implique en effet de choisir une fréquence pour laquelle le traitement est optimal et autour de laquelle la modification a un impact amortissant.

Le dispositif a permis d'atteindre des coefficients d'amortissement modal de l'ordre de 8% sur des modes d'ovalisation à 2 lobes et de 5% sur des modes d'ovalisation à 3 lobes.

L'extension de la méthode de modification structurale LMME à des cas très amortis a été validée expérimentalement. Après avoir étudié le processus de prédiction dans un cadre très amorti pour évaluer la qualité de la méthode, l'application au démonstrateur développé précédemment a permis de démontrer sa capacité de prédiction.

Les résultats de prédiction sont très satisfaisants. Tout d'abord l'étude numérique a montré l'efficacité propre de la méthode étendue. La méthode LMME initialement développée dans [16] et appliquée dans un cadre MSE a montré ses limites de prédiction. Les hypothèses MSE sont en effet dépassées dans le cas de structures très dissipatives et la prédiction de l'amortissement, notamment, souffre, dans ce cas, du non-respect des hypothèses. La méthode étendue donne, quant à elle, une prédiction de bien meilleure qualité et permet de retrouver les caractéristiques de la structure modifiée.

L'application expérimentale de la méthode dans un cas de structure relativement complexe valide le processus. Le modèle numérique associé n'a pas été recalé. La qualité de ce dernier est analogue à celle des modèles de reprise de conception réalisés habituellement dans l'industrie. La comparaison des fonctions de transferts mesurées et prédites après modification montre l'efficacité de la méthode pour prédire le niveau vibratoire à partir de données expérimentales incomplètes.

La méthode LMME dissipative a été conçue pour pouvoir prendre en compte la variation du comportement amortissant avec la fréquence. Cette particularité rend la méthode plus fastidieuse à utiliser que dans le simple cas des structures au comportement indépendant de la fréquence. La dépendance impose en effet de réaliser les calculs de prédiction pour un certain nombre de fréquences de la bande d'intérêt.

Cette dépendance en fréquence a également un impact sur la synthèse modale de transferts. Il a été montré que, pour des comportements dont la dépendance n'est pas trop forte, l'erreur commise sur la synthèse est négligeable. Pour notre cas d'application avec le matériau viscoélastique *smactane50*, cette approximation de synthèse a en effet pu être utilisée.

Un travail didactique sur la réduction des modèles de structures viscoélastiques a permis de comprendre les mécanismes de construction et d'enrichissement des bases de réduction. Travailler avec des structures très amorties nécessite en effet la prise en compte de termes complexes et les méthodes classiques de réduction peuvent être largement améliorées par un enrichissement du premier ordre prenant en compte les efforts viscoélastiques internes. Cet enrichissement permet d'obtenir des bases de réduction efficaces à moindre coût.

## Perspectives

Les résultats d'amortissement encourageants obtenus sur un démonstrateur relativement complexe et avec une réalisation comportant tous les défauts d'un prototypage autorise des perspectives d'applications industrielles très intéressantes comme le traitement des cages de développantes présentées en section 3.1.

Des tentatives de traitement à l'aide de modifications par ajouts de masses ou de raidisseurs n'ont pas toujours donné satisfaction par le passé. Les modifications proposées n'étaient pas stables dans le temps, une dérive fréquentielle du comportement et une augmentation lente des niveaux vibratoires étaient observées. On a montré, ici, que les modifications dissipatives sont des alternatives intéressantes à étudier et sont adaptées au traitement des modes d'ovalisation incriminés sur ce cas d'application.

Pour effectuer un dimensionnement efficace de dispositifs dissipatifs, il sera cependant intéressant de réaliser un couplage thermoélastique pour prédire l'effet de l'échauffement des matériaux viscoélastiques dans le cas d'excitations soutenues. L'effet de la température pouvant être modélisé à l'aide de variables réduites, il est pos-

sible d'envisager de réaliser une prédiction en considérant cette fréquence réduite et de prédire une famille de transferts correspondant à différentes températures.

Un autre aspect concernant le dimensionnement de structures intégrant des matériaux viscoélastiques est l'influence du collage. La colle epoxy pénètre le matériau amortissant et modifie son comportement. Dans notre cas d'étude, ces effets ont été négligés et intégrés aux erreurs de mesures du comportement. Une étude plus fine pourrait être nécessaire pour une application industrielle afin de caractériser au mieux le matériau.



# Bibliographie

- [1] L.R. BAGLEY AND P.J. TORVIK,  
*Fractional calculus - A different approach to the analysis of viscoelastically damped structures*,  
AIAA Journal Vol. 21, No. 5, pp. 741-748, 1983
- [2] E. BALMES,  
*New results on the identification of normal modes from experimental complex modes*,  
Mechanical Systems and Signal Processing, 1997, 11(2), pp 229-243.
- [3] E. BALMÈS,  
*Sensors, degrees of freedom, and generalized modeshape expansion methods*,  
IMAC XVII, 1999
- [4] E. BALMES,  
*Review and Evaluation of Shape Expansion Methods*,  
International Modal Analysis Conference, 2000, pp 555-561.
- [5] E. BALMÈS, S. GERMÈS,  
*Tools for Viscoelastic Damping Treatment Design. Application to an Automotive Floor Panel*,  
Int. Seminar on Modal Analysis, Leuven Belgium, 2002
- [6] E. BALMES,  
*Incorporating damping predictions in the vibroacoustic design process*,  
ISMA, 2004
- [7] E. BALMES, M. CORUS, S. GERMES,  
*Model validation for heavily damped structures*,  
ISMA, 2006
- [8] E. BALMES AND J.M. LECLERC,  
*Visoelastic Vibration Toolbox (For Use with MATLAB)*,  
www.sdtools.com, 2007.
- [9] E. BALMÈS,  
*Methods for vibration design and validation*,  
Course notes Ecole Centrale Paris, 1997-2007
- [10] H. BEN DHIA, E. BALMÈS,  
*Mesure de compatibilité et application aux problèmes de sous-structuration*,  
Colloque National en Calcul des Structures, Giens, 2003



- 
- [11] R.E.D. BISHOP AND D.C. JOHNSON,  
*The Mechanics of Vibration*,  
Cambridge University Press, 1960
- [12] M. BONNET,  
*Notes de cours « problèmes inverses »*,  
DEA Dynamique des structures et systèmes couplés, ECP, 2004
- [13] F. BOURQUIN,  
*Component mode synthesis and eigenvalues of second order operators : discretization and algorithm*,  
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 26(3) : 385-423, 1992
- [14] F. BOURQUIN AND F. D'HENNEZEL,  
*Numerical study of an intrinsic component mode synthesis method*,  
Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 1992
- [15] CENTRE FRANÇAIS DU CAOUTCHOUC,  
*Histoire et propriétés du caoutchouc*,  
<http://www.lecaoutchouc.com>
- [16] M. CORUS,  
*Amélioration des méthodes de modification structurale par utilisation de techniques d'expansion et de réduction de modèle*,  
Thèse EDF/Centrale Paris, France, 2003
- [17] M. CORUS, E. BALMES,  
*Improvement of a Structural Modification Method Using Data Expansion and Model Reduction Techniques*,  
International Modal Analysis Conference, 2003
- [18] M. CORUS, E. BALMES AND O. NICOLAS,  
*Using model reduction and data expansion techniques to improve SDM*,  
Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 20, pp. 10671089, 2005
- [19] R.R. CRAIG, M.C. BAMPTON,  
*Coupling of substructures for dynamic analysis*,  
AIAA Journal, 6 : 1313-1319, 1968
- [20] R.R. CRAIG, AND C.J. CHANG,  
*Substructure coupling for dynamic analysis and testing*,  
NASA CR-2781, 1977
- [21] R.R. CRAIG, JR.,  
*Coupling of substructures for dynamic analyses : an overview*,  
AIAA Journal, AIAA-2000-1573, 2000
- [22] R.R. CRAIG, JR.,  
*A brief tutorial on substructure analysis and testing*,  
University of Texas at Austin, 2000

- [23] J.M. CROS,  
*Parallel modal synthesis methods in structural dynamics*,  
Contemporary Mathematics, 218 : 492-499, 1998
- [24] J.R. CROWLEY, A.L. KLOSTERMAN, G.T. ROCKLIN AND H. VOLD,  
*Direct structural modification using frequency response functions*,  
Proceedings of IMAC II, 1984
- [25] K. CUPPENS, P. SAS, L. HERMANS,  
*Evaluation of the FRF Based Substructuring and Modal Synthesis Technique Applied to Vehicle FE Data*,  
ISMA25, 1143-1150, 2000
- [26] E. DASCOTTE,  
*Model Updating for Structural Dynamics : Past, Present and Future Outlook*,  
International Conference on Engineering Dynamics (ICED), Carvoeiro, Algarve,  
Portugal, April 16-18, 2007.
- [27] G. DHATT, G. TOUZOT,  
*Une présentation de la méthode des éléments finis (deuxième édition)*,  
Maloine S.A. éditeur Paris, 1984
- [28] B. DIERCKX, W. LEURS, N. BOUCART AND W. MOLL,  
*Using rigid connections in experimental modal synthesis : implement and validation*,  
IMAC XVII, 1440-1444, 1999
- [29] MARIA LÚCIA M. DUARTE, DAVID J. EWINS,  
*Improved experimental component mode synthesis (IECMS) with residual compensation based purely on experimental results*,  
IMAC XIV, 641-647, 1995
- [30] G. PLAYE, J.-G. ASTIER, L. DUTRECH,  
*Projet VITAL : Étude de faisabilité de réduction des vibrations sur les cages de développantes des alternateurs 900 MW par ajout de matériau amortissant*,  
Note interne EDF, HT-61/05/021/A, 2005
- [31] D.J. EWINS,  
*Modal Test Requirements for Coupled Structure Analysis using Experimentally Derived Component Models*,  
Joint ASME/ASCE publication. Combined Experimental/Analytical Modeling of Dynamic Structural Systems ; Substructure Synthesis Methods, June 1985.
- [32] D.J. EWINS,  
*Modal Testing : theory, practice and application (second edition)*,  
Research Studies Press LTD, 2000
- [33] C. FARHAT, M. GERADIN,  
*A hybrid formulation of component mode synthesis method*,  
33rd SDM conference, AIAA Paper 92-2383-CP, pages 1783-1796, 1992

- [34] C. FARHAT, F.X. ROUX,  
*Implicit parallel processing in structural mechanics*,  
Mechanical Systems and signal processing, Computational Mechanics Advances,  
Elsevier Science, 1994
- [35] R. FOX, M. KAPOOR,  
*Rate of change of eigenvalues and eigenvectors*,  
AIAA Journal, 6 : 2426-2429, 1968
- [36] M. GERADIN, D. RIXEN,  
*Théorie des vibrations - Application à la dynamique des structures*,  
Masson, second edition, 1996
- [37] W.C GIBSON, C.D. JOHNSON,  
*Optimisation methods for design of viscoelastic damping treatments*,  
ASME design technologies conferences, Boston Massachusetts, USA, 1987
- [38] G.M.L. GLADWELL,  
*Branch mode analysis of vibrating systems*,  
Journal of Sound and Vibration, 1 : 41-59, 1964
- [39] H.G.D. GOYDER,  
*Methods and Application of Structural Modeling from Measured Structural Frequency Response Data*,  
Journal of Sound and Vibration, (1980), 68(2), pp 209-230
- [40] M. VAN GURP AND J. PALMEN,  
*Time-temperature superposition for polymeric blends*,  
The Society of Rheology Newsletter,  
<http://www.rheology.org/sor/publications/rheologyb/jan98/vanGurpPalmen.PDF>,  
1998
- [41] R.J. GUYAN,  
*Reduction of Mass and Stiffness Matrices*,  
AIAA Journal, Vol. 3, pp. 380, 1965
- [42] T.K. HASSELMAN,  
*Modal coupling in lightly damped structures*,  
American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, 14(11) :16271628,  
1976
- [43] G.T. HERMAN,  
*Image reconstruction from projections*,  
Academic Press, first edition, 1980
- [44] L. HERMANS, P. MAS, W. LEURS AND N. BOUCART,  
*Estimation and use of residual modes in modal coupling calculations : a case study*,  
IMAC XVII, 930-936, 1999
- [45] W. HEYLEN AND P. SAS,  
*Review of Model Optimisation Techniques*,

- Proceedings of the 5th International Modal Analysis Conference, London, UK, pp. 1177-1182, 1987.
- [46] W. HEYLEN, S. LAMMENS, AND P. SAS,  
*Modal Analysis Theory and Testing, second ed.*,  
Department of Mechanical Engineering, Katholieke Universiteit Leuven, 1997
- [47] W.C. HURTY,  
*Dynamic analysis of structural systems using component modes*,  
AIAA Journal, 3 : 678-685, 1965
- [48] J-F. IMBERT,  
*Analyse des structures par éléments finis*,  
CEPADUES-EDITIONS, France, 1995
- [49] B. JETMUNDSSEN, R.L. BIELAWA AND W.G. FLANNELLY,  
*Generalized Frequency Domain Substructure Synthesis*,  
Jnl. American Helicopter Society, vol.33(1), pp.55-64, 1988
- [50] L. JÉZÉQUEL,  
*Synthèse de l'amortissement par sous-structures*,  
Thèse doctorale, 1978
- [51] D. JONES,  
*Viscoelastic vibration damping*,  
Wiley, 2001
- [52] G. KERGOULAY,  
*Mesure et prédiction vibroacoustique de structures viscoélastiques*  
*Application à une enceinte acoustique*,  
Thèse Centrale Paris, France, 2004
- [53] D.C. KAMMER,  
*Test-Analysis Model Development Using an Exact Modal Reduction*,  
International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis, pp. 174-179,  
1987
- [54] T. KANT AND K. SWAMINATHAN,  
*Free vibration of isotropic, orthotropic and multilayer plates based on higher order refined theories*,  
Journal of Sound and Vibration, Vol. 241, No. 2, pp. 3193-27, 2001
- [55] A. DE KRAKER, D.H. VAN CAMPEN,  
*Rubin's CMS reduction method for general state-space models*,  
Computers & Structures, Vol. 58, N° 3, pp. 597-606, 1996
- [56] W. KURZ, J.P. MERCIER, G. ZAMBELLI,  
*Introduction à la science des matériaux*,  
Presses polytechniques et universitaires romandes, 1991
- [57] M.A. LAMONITA,  
*On the Determination and Use of Residual Flexibilities , Inertia Restraints and*

- Rigid Body Modes*,  
WAC 1, 1982, pp 153-159.
- [58] D.-G. LEE , S. HONG, J. KIM,  
*Efficient seismic analysis of building structures with added viscoelastic dampers*,  
Engineering Structures 24 (2002) 12171227
- [59] G.A. LESIEUTRE AND K. GOVINDSWAMY,  
*Finite element modeling of frequency-dependent and temperature-dependent dynamic behavior of viscoelastic materials in simple shear*,  
Int. J. Solids Structures Vol. 33, No. 3, pp. 419-432, 1996
- [60] J.H. LIENHARD,  
*A heat transfer textbook*,  
PHLOGISTON PRESS, Cambridge Massachusetts, 2006
- [61] Y.W. LUK AND L.D. MITCHELL,  
*Analytical and Geometric Substructuring via Dual Modal Space Structural Modification*,  
IMAC 2, 1984, pp 50-57.
- [62] Y.W. LUK AND L.D. MITCHELL,  
*Implementation of the Dual Modal Space Structural Modification Method*,  
IMAC 2, 1984, pp 930-936.
- [63] R.H. MACNEAL,  
*A hybrid method of component mode synthesis*,  
Computers and structures, 1 : 581-601, 1971
- [64] N. MAIA, J. SILVA,  
*Theoretical and experimental modal analysis*,  
Computers and Structures, 1 : 581-601, 1971
- [65] K-W. MIN, J. KIM, S-H LEE,  
*Vibration tests of 5-storey steel frame with viscoelastic dampers*,  
engineering structures 26, 831-839, Séoul, Corée du Sud, 2004
- [66] D.R. MORGENTHALER,  
*Design and analysis of passively damped large space structures*,  
ASME design technologies conferences, Boston Massachusetts USA, 1987
- [67] A. NASHIF, D. JONES, J. HENDERSON,  
*Vibration damping*,  
John Wiley & Sons, 1985
- [68] J.C. O'CALLAHAN, P.A. AVITABILE AND R. RIEMER,  
*System Equivalent Reduction Expansion Process (SEREP)*,  
IMAC VII, pp. 29-37, 1989
- [69] R. OHAYON, C. SOIZE,  
*Structural acoustics and vibration*,  
Academic Press, France, 1998

- [70] D. OTTE, J. LEURIDAN, H. GRANGIER, AND R. AQUILANA,  
*The use of SVD-based data reduction techniques for coupling of structures using measured FRF data*,  
Proceedings of the 15th International Seminar on Modal Analysis (ISMA), Leuven, Belgium, pp. 99-113, 1990
- [71] A. PALMERI,  
*Correlation coefficients for structures with viscoelastic dampers*,  
Journal of Engineering Structures, Vol. 28, pp. 1197-1208, 2006
- [72] Y.-H. PARK AND Y.-S. PARK,  
*Structural modification based on measured frequency response functions : an exact eigenproperties reallocation*,  
Journal of Sound and Vibration, 237(3), 411-426, 2000
- [73] A. PLOUIN, E. BALMÈS,  
*A test validated model of plates with constrained viscoelastic materials*,  
IMAC, pp. 194-200, 1999
- [74] A. PLOUIN, E. BALMÈS,  
*Steel/Viscoelastic/Steel Sandwich Shells. Computational Methods and Experimental Validations*,  
International Modal Analysis Conference, San Antonio, 2000
- [75] T. PRITZ,  
*Analysis of four-parameter fractional derivative model of real solid materials*,  
Journal of Sound and Vibration, 195(1) pp :103115, 1996
- [76] T. PRITZ,  
*Frequency dependances of complex moduli and complex poisson's ratio of real solid materials*,  
Journal of Sound and Vibration, 214(1) : 83-104, 1998
- [77] A. RITTWEGER, J. ALBUS, E. HORNING, H. ORY AND P. MOUREY,  
*Passive damping devices for aerospace structures*,  
Acta Astronautica Vol. 50, No. 10, pp. 597608, 2002
- [78] L. ROGERS, C. JOHNSON AND D. KEINHOLZ,  
*The Modal Strain Energy Finite Element Method and its Applications to Damped Laminated Beams*,  
Shock and Vibration Bulletin, Vol.51, 1981
- [79] L. ROGERS, D. KEINHOLZ,  
*Finite Element Prediction of Damping in Structures with Constrained Viscoelastic Layers*,  
AIAA Journal, Vol. 20, No.9, 1981
- [80] N. ROY, A. GIRARD, L. BUGEAT, L. BRICA,  
*A Survey of Finite Element Model Updating Methods*,  
Proceedings of the international Symposium on Environmental Testing for Space Programs - Test Facilities and Methods, ESTEC Noordwijk, June 1990.

- [81] J. SALENÇON,  
*Viscoélasticité*,  
Presses de l'école nationale des ponts et chaussées, France, 1983
- [82] L. A. DA SILVA,  
*Internal Variable and Temperature Modeling Behavior of Viscoelastic Structures  
A Control Analysis*  
Doctoral Dissertation, Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University, USA, 2003
- [83] G.W. SKINGLE,  
*Structural dynamic modification using experimental data*,  
PhD thesis, Imperial College of science, technology and medicine, University of London, 1989
- [84] V.W. SNYDER,  
*Modal Synthesis using Eigenvalue Modification*,  
IMAC 1, 1982, pp 1134-1137.
- [85] M. A. TRINDADE,  
*Contrôle hybride actif-passif des vibrations de structures par des matériaux piézoélectriques et viscoélastiques : poutres sandwich/multicouches intelligentes*  
Thèse CNAM, France, soutenue le 15 juin 2000
- [86] MH. TSAI, KC. CHANG,  
*A study of the Modal Strain Energy method for viscoelastically damped structures*,  
Journal of the Chinese Institute of Engineers, 2001
- [87] W. J. VISSER,  
*Updating structural dynamics models using frequency response data*  
IMPERIAL COLLEGE OF SCIENCE, TECHNOLOGY AND MEDICINE, University of London, September 1992
- [88] W. WANG , S. HONG, J. KIRKHOPE,  
*Complex component mode synthesis for damped systems*,  
Journal of Sound and Vibration (1995) 181(5), 781800
- [89] K.C. YAP, D.C. ZIMMERMAN,  
*A comparaison of structural modification techniques*,  
IMAC V, 1 : 65-71, 1987
- [90] A. ZAMBRANO, JA. INAUDI, JM. KELLY,  
*Modal coupling and accuracy of Modal Strain Energy method*,  
Journal of Engineering Mechanics, ASCE 1996





## Résumé

L'objectif de cette thèse est d'étendre une méthode de modification structurale pour la conception de dispositifs dissipatifs destinés à corriger durablement le comportement vibratoire de certaines structures.

La première partie du travail pose les bases théoriques de la modélisation des structures amorties et plus particulièrement des structures viscoélastiques. Une étude de conception de structures amortissantes intégrant des matériaux viscoélastiques est ensuite réalisée sur un démonstrateur expérimental représentatif de structures qu'EDF envisage d'amortir. La réalisation de la modification dissipative permet d'en mesurer expérimentalement les performances, qui sont comparées à celles prédites par la modélisation numérique. Ce travail de conception numérique met en lumière les limites des méthodes classiques de conception dans le contexte imposé par EDF (modèle non recalé, structures complexes, accès aux mesures limité).

La seconde partie consiste donc à utiliser une méthode de modification structurale adaptée pour prédire l'effet de la modification dissipative proposée dans cette thèse. La méthode choisie, basée sur une formulation modale du couplage, a déjà été éprouvée au sein d'EDF, dans un cadre de structures non ou faiblement amorties. L'ajout d'un terme d'amortissement et d'une dépendance fréquentielle du comportement (intrinsèque aux matériaux viscoélastiques) imposent quelques adaptations à la méthode. Une fois les évolutions apportées, la robustesse de la méthode est étudiée à travers quelques points sensibles de son application. L'utilisation de la modification précédemment conçue permet une validation expérimentale sur un cas relativement complexe.

## Abstract

The aim of this work is to extend the use of a structural dynamic modification method to cases of damping device design. These devices are meant to improve the mechanical behaviour of some structures used by EDF (Electricité de France).

The first step of the work is to give theoretical bases on the modelling of heavily damped structures and especially viscoelastic ones. One then performs a design study for an experimental testbed that is representative of structures EDF wants to treat. The performance of the damping device is evaluated experimentally and compared with the numerical results. This numerical design study highlights the limitations of classical design methods in the context of industrial exploitation of EDF (non updated models, complex structures, access to measurements limited).

The second part of the work thus deals with the adaptation of a structural dynamic modification method to the case of the proposed damped modification. The chosen method is based on a modal coupling formulation that has been tested within EDF on undamped applications. But the method needs some adaptations because of the use of damping terms in equations and the fact that the mechanical behaviour is frequency dependant (a characteristic of viscoelastic materials). The robustness of the method is then analyzed through some points that are important for its application. The method is experimentally validated through the testbed.