

Mesure de compatibilité et application aux problèmes de sous-structuration

H. Ben Dhia, E. Balmès

LMSS-Mat, École Centrale Paris
Grande voie des vignes 92290 Châtenay-Malabry
bendhia@mssmat.ecp.fr ; balmes@mssmat.ecp.fr

Résumé

Nous proposons un outil simple de mesure de compatibilité entre des espaces discrets de champs définis sur un même domaine (interface, par exemple). Cet outil permet de définir des espaces de *(1-ε)-compatibilité*. L'intérêt de l'usage de tels espaces pour le calcul des structures est ici éclairé numériquement à travers les méthodes de sous-structuration.

1 Introduction

La recherche d'une flexibilité maximale de modélisations, fines et différenciées par zones, des problèmes de structures, d'une part, le déploiement de méthodes adaptatives et/ou correctives, d'autre part ainsi que la volonté d'usage des capacités des machines parallèles pour traiter les problèmes numériques comptant un grand nombre de degrés de liberté (quelques centaines de millions de *ddl*, aujourd'hui), amènent aux méthodes de sous-structuration. Ces dernières posent la question du couplage des modèles au niveau de leurs interfaces.

L'exemple qui nous servira de guide dans ce papier est celui d'un problème de structure élastique linéaire dont le domaine occupé est la réunion de deux sous-domaines. L'intersection de ces deux sous-domaines est notée ω (cf. figure 1). Les méthodes de sous-structurations classiques définissent alors, sur chaque sous-domaine, des espaces de champs de déplacements et de contraintes cinématiquement et statiquement admissibles,

respectivement, tels que la relation de comportement du matériau constitutif soit satisfaite et tels que des relations de transmission soient assurées au niveau de l'interface ω . Des formulations de type primales ou duales, ou bien de type Galerkin Discontinus (DG) peuvent alors être utilisées pour assurer les transmissions. Ces formulations classiques sont consistantes, dans le cadre continu. Cette consistance n'est pas nécessairement transmise au cadre discret, ici celui de l'approximation par la méthode des éléments finis. En effet, la flexibilité, mentionnée ci-dessus, induit, en contre-partie, la nécessité gérer des maillages qui ne sont pas compatibles aux interfaces. Cette incompatibilité rend délicat, voire impossible, en discret, l'usage de méthodes primales de transmissions. Mais nous pouvons utiliser les méthodes duales. Ces dernières introduisent des champs de flux d'efforts pour raccorder, faiblement, les champs primaux aux interfaces, donnant ainsi lieu à des formulations mixtes ou hybrides. Lorsque les espaces de discrétisation des champs primaux sont fixés, la question de choix d'espaces de discrétisation des flux se pose. A ce niveau réside une difficulté classique des approches mixtes ou hybrides liée à la condition *Inf-Sup* uniforme. Des réponses sont données dans la littérature. Nous renvoyons aux travaux de Babuska [1], Raviart et Thomas [8], dans les cas conformes, à ceux de Bernardi et col. [7] dans les cas non conformes ; ces derniers ayant donné « naissance » aux éléments dits *mortiers*. Nous renvoyons également à [2] pour une discussion de différents raccords dans le domaine de la *CMS (Component Mode Synthesis)*. Notons aussi que les discrétisations des formulations *DG* posent également les mêmes questions.

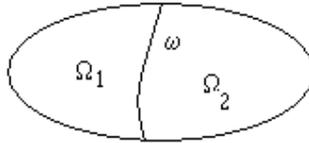


Figure 1 : Sous-structuration

A présent, si nous considérons la méthode des éléments *mortiers* comme un « paradigme » de la sous-structuration (en présence d'incompatibilité), nous pouvons relever deux points intéressants. Le premier est que, pour des problèmes de type elliptique (par exemple élasticité linéaire, tel que considéré ici), l'approximation assurée par ces éléments est théoriquement optimale, en faisant abstraction, toutefois, de l'approximation due à l'intégration numérique dont le rôle est souligné dans (Ben Dhia et Zarroug [4] et Ben Dhia et Rateau [5]). Le second est que les choix, en pratique, des espaces des flux discrets semblent « naviguer » dans une variété dont seules les « bornes » sont clairement définies : ces espaces sont définis, (moyennant des précautions aux bords de l'interface), soit à partir de l'un ou de l'autre des espaces traces, sur cette interface, des champs de volume, soit à partir de « combinaisons intermédiaires ». Le premier choix est explicite, mais pas le second. C'est précisément à un choix clair d'espaces discrets de flux que nous dédions la majeure partie de ce travail. Cette question nous semble importante en pratique car, si la tendance des solutions, par raffinement des espaces d'approximation, n'est pas affectée par les choix des espaces de flux, le champ flux solution et celui des contraintes peuvent, pour une approximation donnée, « fortement » incompatible, présenter, au niveau de l'interface,

soit des oscillations numériques, mécaniquement inacceptables, soit des « verrouillages » locaux.

L'objectif de ce papier est de préciser et développer une méthode introduite dans (Ben Dhia [6]), construisant des espaces de *(1-ε)-compatibilité* entre deux espaces de champs primaux, définis sur un même domaine. Ce sont ces espaces *(1-ε)-compatibles* qui sont alors proposés comme espaces de flux, aptes à atténuer, voire absorber, et les oscillations, et les verrouillages. Cette même méthode constructive permet, au passage, d'évaluer simplement un « *indice de compatibilité* » entre les deux espaces de champs primaux. Cette notion peut représenter un quantificateur de « qualité géométrique du maillage de l'interface », permettant de prendre, éventuellement, la décision d'amélioration la « conformité de ce maillage d'interface ».

Le papier est organisé selon les lignes qui suivent. Les outils permettant la construction des notions d'espaces et indices de *(1-ε)-compatibilité* [6] sont donnés dans la section 2. Ces notions sont exploitées dans la section 3, dédiée à un problème modèle de sous-structuration, en statique. Des exemples de bases d'interfaces [2], [3], servant à construire les espaces *(1-ε)-compatibles* y sont explicités. Les formulations primales et duales, du même problème modèle, usant des espaces de *(1-ε)-compatibilité* sont brièvement décrites dans la section 4. Les premières illustrations numériques sont fournies dans le dernier paragraphe.

2 Espaces et indices de *(1-ε)-compatibilité* de deux espaces

Nous considérons une structure occupant l'adhérence d'un domaine Ω de R^n , ($n = 2$ ou 3) et nous considérons deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 , formant une partition du domaine Ω . Nous notons ω le domaine interface de ces deux sous-domaines. Précisons que, dans le cas sans recouvrement, il s'agit de l'intérieur de l'intersection des adhérences des deux sous-domaines. Précisons également que, dans le cas avec recouvrement, l'interface est l'intersection des deux sous-domaines et que nous pouvons considérer le cas où n vaut 1.

Nous définissons sur ω un espace de *Hilbert* V . Ce sera l'espace des traces ou des restrictions à ω des champs des déplacements cinématiquement admissibles, définis sur Ω et non contraints cinématiquement sur le bord de ω . Nous notons $(.,.)_V$ le produit scalaire de V et $\|.\|_V$ la norme associée. Nous considérons, à présent, les deux espaces des traces ou de restriction des deux sous-espaces des déplacements discrets, définis sur Ω_1 et Ω_2 . Nous les notons V_1 et V_2 . Nous notons N_1 et N_2 leur dimension respective et nous nous posons la question de la "*comparaison*" de ces deux sous-espaces.

Nous répondons à cette question par la définition d'une mesure de compatibilité appelée *indice de compatibilité* des deux sous-espaces, par rapport au produit scalaire $(.,.)_V$. Cette notion est dégagée selon les lignes qui suivent.

Soit $B_1 = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{N_1})$ une base de V_1 . Soit, pour $1 \leq i \leq N_1$, $\Pi_2^1 \mu_i$ le champ projection orthogonale de μ_i dans V_2 , au sens du produit scalaire $(.,.)_V$. On évalue la

compatibilité de μ_i à V_2 , au sens de $(., .)_V$, en calculant le rapport (compris entre 0 et 1) suivant

$$C_i = \frac{\|\Pi_2^1 \mu_i\|}{\|\mu_i\|} \quad (1)$$

Pour $0 \leq \varepsilon \leq 1$, on appelle alors espace de $(1-\varepsilon)$ -compatibilité de V_1 à V_2 , par rapport au produit scalaire $(., .)_V$, celui généré par les éléments de la base tels que :

$$1 - \varepsilon \leq C_i \leq 1 \quad (2)$$

On note $V_{1-2-\varepsilon}$ cet espace et $N_{1-\varepsilon}$ sa dimension et on définit l'indice de compatibilité de V_1 à V_2 , par rapport au produit scalaire $(., .)_V$, comme suit.

$$I_{C12}(V_1, V_2; \varepsilon) = \frac{N_{1-\varepsilon} - N_R}{N_1 - N_R} \quad (3)$$

où N_R est la dimension de l'espace des mouvements rigides, contenus dans V_1 . On peut, en inversant les rôles de V_1 et V_2 , construire l'espace $V_{2-1-\varepsilon}$, noter $N_{2-\varepsilon}$ sa dimension et définir l'indice de compatibilité de V_2 à V_1 , par rapport au produit scalaire $(., .)_V$, comme suit.

$$I_{C21}(V_2, V_1; \varepsilon) = \frac{N_{2-\varepsilon} - N_R}{N_2 - N_R} \quad (4)$$

L'espace de $(1-\varepsilon)$ -compatibilité de V_1 et V_2 est celui de $V_{2-1-\varepsilon}$ ou de $V_{1-2-\varepsilon}$ donnant le plus grand indice de compatibilité. L'espace ainsi obtenu sera noté $\mathcal{C}(V_1, V_2; \varepsilon)$ et le plus grand des deux indices, définis par (3) et (4), sera noté $I_{\mathcal{C}}(V_1, V_2; \varepsilon)$ et appelé *indice de $(1-\varepsilon)$ -compatibilité* de V_2 et V_1 , par rapport au produit scalaire $(., .)_V$. Notons, au passage, que ce sont des couples de champs « appariés » qui sont ainsi construits. Ils génèrent l'espace que nous notons $\vec{\mathcal{C}}(V_1, V_2; \varepsilon) = (\mathcal{C}, \Pi, \mathcal{C})$. Terminons ce paragraphe par des définitions.

Définitions : Si ε vaut 0 et que $I_{\mathcal{C}}$ vaut 1 alors les deux espaces seront dits totalement compatibles. Dans le cas extrême contraire, i.e., si pour $\varepsilon=0$, $I_{\mathcal{C}}$ vaut 0 alors les deux espaces seront dits totalement incompatibles ou orthogonaux, toujours au sens du produit scalaire utilisé.

3 Un problème modèle de sous-structuration

Considérons le cas d'un problème d'élasticité 2-D. Schématiquement, en partitionnant le domaine en deux sous-domaines, sans recouvrement, suivant les lignes décrites ci-dessus, et en utilisant une formulation hybride de raccord, le problème discret, obtenu par usage de la méthode des éléments finis, s'écrit :

$$\text{Trouver } (\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathbf{W} \times \mathfrak{T}; \forall \mathbf{v}, \boldsymbol{\mu} \in \mathbf{W} \times \mathfrak{T} \quad (5)$$

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + B(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}) + B(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}) = l(\mathbf{v})$$

où $\mathbf{u} = (\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2)$, $\mathbf{v} = (\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2)$ et $\mathbf{W} = \mathbf{W}_1 \times \mathbf{W}_2$, avec \mathbf{W}_i , $i = 1, 2$, représentant l'espace des déplacements cinématiquement admissibles sur Ω_i et où $A(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ représente les travaux virtuels des forces internes élastiques dans le milieu, $l(\mathbf{v})$ ceux des forces externes, supposées données, et $B(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu})$ correspond aux travaux virtuels des forces de raccord, servant à assurer la transmission des champs des déplacements au niveau de l'interface. Ce terme peut être écrit comme suit

$$B(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}) = - \int_{\omega} \boldsymbol{\mu} \cdot (\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2) d\omega. \quad (6)$$

La construction de l'espace de $(1-\varepsilon)$ -compatibilité \mathfrak{T} se fait alors a priori selon la méthode décrite dans la section 2, en considérant comme espaces V_1 et V_2 les espaces des traces de \mathbf{W}_1 et \mathbf{W}_2 sur ω (interface) et moyennant les développements qui suivent. Dans la section 2, nous avons évoqué des bases des espaces V_i , $i = 1, 2$. La question que l'on se pose alors est comment construire de manière pertinente et pratique ces bases. Voici des alternatives.

3.1 Champs d'interface modes d'une structure support

Une première approche consiste à considérer que ω est la ligne moyenne d'une poutre, formée du même matériau élastique que le milieu étudié, ayant une épaisseur donnée (*a priori* sans rapport avec les dimensions des éléments internes des maillages de chacun des sous-domaines), mais dont la fibre moyenne hérite des traces des maillages (différents) de chacun des deux sous-domaines. Nous pouvons alors calculer, sans ambiguïté, les modes propres de la poutre dont les traces sur l'interface serviront, moyennant un produit scalaire utilisant la raideur de la poutre, et en suivant les étapes de la section 2, à constituer l'espace \mathfrak{T} . Notons que cette approche peut s'écrire simplement en continu.

3.2 Décomposition en valeurs singulières de l'opérateur de projection

Une seconde approche consiste à décomposer en valeurs singulières l'opérateur de projection discrète de V_1 dans V_2 , garantissant, au passage, un traitement directement « démocratique » de deux espaces : nul besoin, en effet, pour cette seconde approche, de passer par V_1 , puis par V_2 . La démarche est brièvement la suivante : i) on définit un produit scalaire discret sur les espaces des champs d'interfaces, en prenant, dans le cas d'éléments linéaires d'interface, la somme des produits des valeurs de deux champs en l'ensemble des points des deux maillages de l'interface. On note $(\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2)_V$ ce produit scalaire. ii) On calcule les couples de champs $(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)$, solutions du problème suivant :

$$\text{Sup}_{\mathbf{v} \in V} \frac{(\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2)_V}{\|\mathbf{v}_1\|_{V_1} \|\mathbf{v}_2\|_{V_2}} \quad (7)$$

où $V = V_1 \times V_2$ et on itère la même opération, en considérant le *Sup.* du même quotient, de type Rayleigh, sur les orthogonaux aux espaces générés par les modes trouvés

préalablement. iii) En ne considérant que les « modes » pour lesquels ces quotients, (toujours plus petit ou égaux à 1), sont supérieurs ou égaux à $(1-\varepsilon)$, nous constituons des couples de modes générateurs, dans chacun des espaces d'interface, de sous-espaces de $(1-\varepsilon)$ -compatibilité. Cette approche génère l'espace $\vec{C}(V_1, V_2; \varepsilon) = (\mathcal{T}, \Pi \mathcal{T})$ de la fin de la section 2.

Notons ici que l'équivalent continu de cette approche consiste à considérer le produit scalaire L^2 des champs d'interfaces, à la place de la somme, en discret, des produits des valeurs ponctuelles des champs et que, ce faisant, l'on constate qu'il pourrait y avoir un intérêt à considérer ces derniers comme des formules d'intégrations numériques.

Cette seconde approche permet de construire une base générant l'espace $\vec{C}(V_1, V_2; \varepsilon)$ tout en classant les vecteurs par compatibilité croissante. Elle est à rapprocher d'autres utilisations de la décomposition en valeurs singulières en synthèse modale (Balmès [9]). D'autres choix de produits scalaires, opérant par relèvement statique des champs d'interface, et permettant ainsi d'introduire une mécanique de voisinage de l'interface, sont possibles.

4 Formulations primale et duale fondées sur les espaces de $(1-\varepsilon)$ -compatibilité

La construction des espaces de $(1-\varepsilon)$ -compatibilité nous a, en réalité, permis de construire des couples d'espaces $(1-\varepsilon)$ -appariés. Cet aspect nous semble intéressant, pour les calculs pratiques, car il permet i) de donner une variante à la formulation mixte du problème défini dans la section précédente et ii) de proposer une écriture primale du raccord incompatible. En effet, pour obtenir la variante de la formulation mixte, il suffit de d'éclater le raccord, donné par (6) en deux parties. Soit : (où l'on a supposé que l'espace \mathcal{T} était contenu dans V_1).

$$\int_{\omega} \mu \cdot \mathbf{u}^1 \, d\omega - \int_{\omega} \Pi \mu \cdot \mathbf{u}^2 \, d\omega = 0, \quad \forall \mu \in \mathcal{T} \quad (8)$$

Pour obtenir la formulation primale, on supprime les fonctions de base éléments finis, associées aux nœuds situés sur l'interface, pour les remplacer par les paires de vecteurs générant $\vec{C}(V_1, V_2; \varepsilon)$.

5 Illustrations numériques

On va illustrer ici les outils proposés sur le cas d'une poutre encastree divisée en deux maillages incompatibles.

La figure 1 compare la flexion trois nœuds pour un maillage compatible et un maillage incompatible défavorable où une continuité stricte du mouvement à l'interface imposerait un mouvement de corps rigide. La formulation d'élément mortier classique (soit l'application de (6) avec μ dans V_2) permet de relâcher cette contrainte mais en utilisant de manière préférentielle l'un des espaces V_i . Le choix de V_1 conduit au résultat catastrophique montré dans la figure. L'utilisation de V_2 ou le recours à un produit scalaire lié à un modèle volumique de l'interface évoqué en section 3.1 améliorent le résultat mais ces manipulations ont un caractère arbitraire que l'on veut éviter.

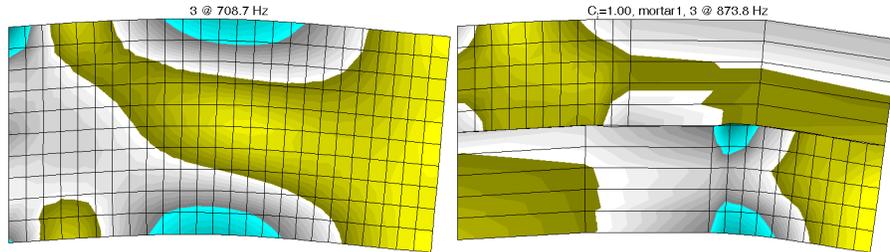


Figure 1– Calcul compatible et mortier classique pour μ dans V_I (partie haute)
(Contraintes de von Mises de la flexion 2 nœuds)

La figure 2 illustre les techniques d'assemblage primal et dual proposés en section 3.2 à partir des bases de l'espace $\vec{C}(V_I, V_2; 0.1)$ obtenues par décomposition en valeur singulière. L'assemblage primal garanti une compatibilité parfaite mais on voit l'apparition d'une surcontrainte locale dans la partie basse. L'assemblage dual assurant une transmission d'efforts réguliers évite ce phénomène au détriment de la compatibilité. On constate par ailleurs que le choix de formulation entre (6) et (8) est peu important si l'on ne conserve que les modes compatibles à 90%.

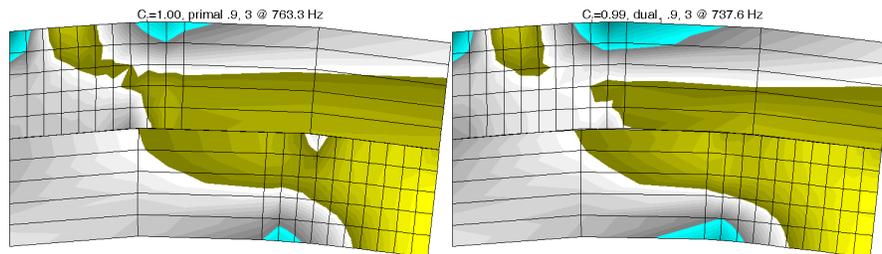


Figure 2– Assemblage primal et dual (8) en retenant les paires de vecteurs compatibles à 90 %.

Les résultats précédents correspondent à une réponse particulière qui est plus ou moins bien représentable avec un maillage incompatible donné. La notion d'indice de compatibilité introduite en section 2 a pour vocation de donner une indication de compatibilité *a priori*. Ces indices sont cependant dépendants de la base retenue. La figure 3 illustre que si l'on prend les fonctions de base EF l'indice de compatibilité n'est non nul que pour $1-\varepsilon$ très faible. Pour la base construite par décomposition en valeur singulière, les vecteurs sont ordonnés par compatibilité décroissante et on a ici 8 vecteurs de compatibilité supérieure à 90 %. Ceci explique la possibilité de bien prédire la flexion deux nœuds dans les figures précédentes.

La deuxième illustration de la figure considère un cas raffiné avec décalage d'une demi maille. On voit qu'alors l'indice de 1 est atteint pour une compatibilité de 0.8. L'indice de compatibilité permet donc de quantifier le fait que ce deuxième maillage, bien qu'incompatible, représente un cas beaucoup moins contraignant que le premier.

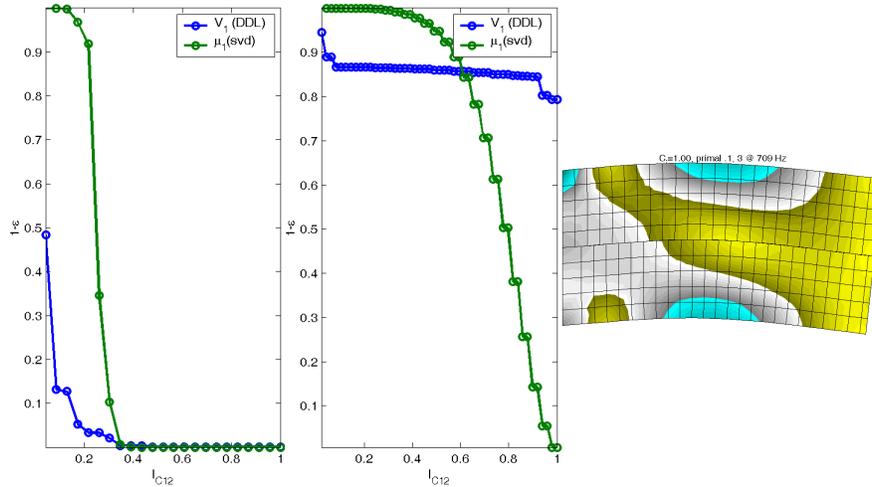


Figure 3 : Evolution de $I-\varepsilon$ en fonction de l'indice de compatibilité pour le maillage des figures 1-2 et un maillage décalé d'une demi maille.

Ces quelques illustrations n'ont eu pour objectif que de montrer le potentiel des concepts introduits dans cet article. De nombreux raffinements théoriques et numériques sont possibles et considérés activement par les auteurs.

Références

- [1] Babuska I, The finite element method with Lagrange multiplier, *Numer.Math.*, **20**, 179-192, (1973).
- [2] Balmès E., Use of generalized degrees of freedom in Component Mode Synthesis, *Proceedings IMAC*, 204-210, (1996).
- [3] Balmès E., Review and evaluation of shape expansion methods, *Proceedings IMAC*, 555-561, (2000).
- [4] Ben Dhia H., Zarroug M., Hybrid frictional contact particles-in elements, *Revue Européenne des Eléments Finis*, vol. **11**, n° 2-3-4, 417-430 (2002).
- [5] Ben Dhia H., Rateau G., Application of the Arlequin method to some structures with defects, *Revue Européenne des Eléments Finis*, , vol. **11**, n° 2-3-4, 291-304 (2002).
- [6] Ben Dhia H., Mécanique du Contact, *Notes de cours Option MAE-VO et DEA DSSC, Ecole Centrale de Paris*, (2001/2002).
- [7] Bernardi C. , Maday Y., Patera A.T., A New non conforming approach to domain decomposition: the Mortar element, *Collège de France Seminar, Pitman, H. Brezis, J.L. Lions* , (1990).
- [8] Raviart P.A, Thomas J.M., Primal hybrid finite element methods for 2nd order elliptic equations, *Math Comp.*, **31**, 391-413, (1977).
- [9] Balmès E., Réduction de modèles d'interface. Applications à un problème d'interaction sol structure., *Dossier de validation de MISS-3D, Rapport EDF* 1999.